

Komplexní analýza a transformace 2024/2025

Cvičení 13

Fourierova transformace

Připomenutí.

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (\text{Fourierova transformace funkce } f(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C})$$

$$\check{f}(\omega) = \mathcal{F}^{-1}[f(t)](\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt \quad (\text{inverzní Fourierova transformace funkce } f(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C})$$

- $\hat{f}(\omega) = 2\pi\check{f}(-\omega)$
- Pro hezké funkce platí $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}[f(t)]) = f$ (věta o inverzi).

- **Základní aritmetika Fourierovy transformace:**

- ★ $\mathcal{F}$ je lineární.

- ★ Pro $a \in \mathbb{R}$: $\mathcal{F}[f(t-a)](\omega) = e^{-i\omega a} \mathcal{F}[f(t)](\omega)$.

- ★ Pro $a \in \mathbb{R}$: $\mathcal{F}[e^{iat}f(t)](\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega-a)$.

- ★ Pro $a \in \mathbb{R}$ nenulové: $\mathcal{F}[f(at)](\omega) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}[f(t)](\frac{\omega}{a})$.

[posun vzoru]

[posun obrazu]

[škálování]

- **Obraz Gaussovy funkce:**

$$\mathcal{F}[e^{-at^2}](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}, \text{ kde } a > 0 \text{ je parametr.}$$

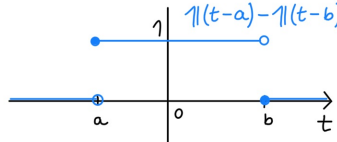
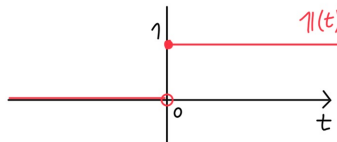
- **Vztah Fourierovy transformace a derivace pro pěkné funkce:**

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)](\omega) = (i\omega)^n \mathcal{F}[f(t)](\omega) \quad (\text{obraz derivace})$$

$$\mathcal{F}[tf(t)](\omega) = i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[f(t)](\omega) \quad (\text{derivace obrazu}).$$

- **Heavisideova funkce:**

$$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < 0, \\ 1, & \text{pro } t \geq 0. \end{cases}$$



- **Konvoluce dvou pěkných funkcí** $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ je funkce $(f * g)(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná jako

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau) d\tau \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

- **Fourierova transformace konvoluce:**

$$\mathcal{F}[(f * g)(t)](\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).$$

- **Vztah Fourierovy transformace a komplexních koeficientů Fourierovy řady:** Necht $a \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ je periodická funkce s periodou $T > 0$ a $f|_{[a, a+T)} \in L^1([a, a+T))$. Fourierovy koeficienty c_n funkce $f|_{[a, a+T)}$ jsou

$$c_n = \frac{1}{T} \mathcal{F}[f|_{[a, a+T)}](t) \left(\frac{2\pi n}{T} \right).$$

- **Vztah Fourierovy transformace a Laplaceovy transformace:** Ať $f \in L_0$ taková, že $F(s) = L[f](s)$ je definována pro $s \in \mathbb{C}$ splňující $\text{Re } s = 0$. Potom $f \in L^1(\mathbb{R})$ (pro $t < 0$ chápeme f dodefinované 0) a

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = F(i\omega).$$