

Komplexní analýza a transformace 2024/2025

Domácí úkol 4

Úloha 1. *Spočtěte*

$$\int_C \left(\operatorname{Im} z + \frac{\cos(z^3 + 5z + 2)}{e^{6i+3iz}} \right) dz,$$

kde C je kladně orientovaná hranice trojúhelníka $0, 1 - i, 2$.

Křivkový integrál

Připomenutí.

- Pro $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definujeme

$$\varphi'(t) = (\operatorname{Re} \varphi)'(t) + i(\operatorname{Im} \varphi)'(t)$$

a

$$\int_a^b \varphi(t) dt = \int_a^b (\operatorname{Re} \varphi)(t) dt + i \int_a^b (\operatorname{Im} \varphi)(t) dt.$$

- Díky derivaci složené funkce však obvykle můžeme počítat rovnou, tedy tak, že i chápeme jako konstantu.
- Křivky: parametrizujeme, pro uražené jednoduché křivky je kladná orientace je proti směru hodinových ručiček...
- Úsečka mezi body a a b : $\varphi(t) = a + t(b - a)$, $t \in [0, 1]$.
- Kružnice se středem S a poloměrem r v kladném směru: $\varphi(t) = S + re^{it}$, $t \in [-\pi, \pi]$
- **Křivkový integrál** funkce f podél křivky C

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

- Pokud je křivka C složená z několika křivek $C_1, \dots, C_n$, můžeme integrovat přes jednotlivé křivky a následně sečíst. Pozor na zachování správné orientace.
- Je-li $F'(z) = f(z)$ na otevřeném Ω , pak řekneme, že F je **primitivní** k f na Ω , a pro křivku C s počátečním bodem z_1 a koncovým bodem z_2 platí

$$\int_C f(z) dz = F(z_2) - F(z_1).$$

Tedy integrál nezávisí na cestě.

- **Cauchyova věta:** Je-li Ω jednoduše souvislá oblast a f je holomorfní na Ω , pak pro každou uzavřenou křivku $C \subset \Omega$

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

- Holomorfní funkce na jednoduše souvislé oblasti má primitivní funkci.