

Komplexní analýza a transformace 2024/2025

Domácí úkol 5

Úloha 1. Nalezněte součet $f(z)$ mocninné řady na jejím kruhu konvergence a určete jeho parametry.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{2^{n+1}} z^{n+5}.$$

Vzorové příklady k Úlohám 3 a 4 z Moodlu

Úloha 2. Nalezněte součet $f(z)$ mocninné řady na jejím kruhu konvergence a určete jeho parametry.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n (z+i)^{2n+1}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n!} z^{2n+3}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)5^{n+1}} z^{n+3}$

Úloha 3. Rozviňte funkci $f(z)$ do mocninné řady se středem v z_0 a určete parametry jejího kruhu konvergence.

(a) $f(z) = \frac{z-3}{1-2z}$, $z_0 = 3$

(b) $f(z) = \frac{1}{(z+6)^2}$, $z_0 = -4$

(c) $f(z) = (z-2)^4 e^{3z}$, $z_0 = 2$

(d) $f(z) = \frac{(z+1)^5}{z^2+z-2}$, $z_0 = -1$

Mocninné řady

Připomenutí.

- Mocninná řada je řada tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

kde $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je daná číselná posloupnost (tzv. **koefficienty mocninné řady**), z je proměnná a z_0 je pevně dané číslo (tzv. **střed mocninné řady**).

- ★ Pro každou mocninnou řadu existuje (právě jedno) $R \in [0, \infty]$ takové, že řada absolutně konverguje na otevřeném kruhu se středem v z_0 a poloměru R , a diverguje na množině $\{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| > R\}$. Toto R se nazývá **poloměr konvergence mocninné řady**. Otevřený kruh se středem z_0 a poloměru R se nazývá **kruh konvergence mocninné řady**.
- ★ $R = \infty$ znamená, že kruh konvergence je celá komplexní rovina. Pokud je $R = 0$, tak je tento otevřený kruh vlastně prázdná množina. Příklad $R = 0$ nastat může, ale takové mocninné řady jsou pro nás nezajímavé, protože s nimi nejde nic moc dále dělat.
- ★ Mocninná řada neobsahuje záporné mocniny $(z - z_0)$.
- Pro určení součtů mocninných řad je třeba znát některé známé součty, zejména:
 - ★ $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ pro $|z| < 1$ (geometrická řada)
 - ★ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$ pro libovolné $z \in \mathbb{C}$ (rozvoj exponenciály)
- Mocninnou řadu (s kladným poloměrem konvergence) lze na jejím kruhu konvergence derivovat a integrovat člen po členu. Výsledkem je zase mocninná řada, která má stejný kruh konvergence. Na kruhu konvergence platí:
 - ★ $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (z - z_0)^{n-1}$
 - ★ $\int (\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n) dz \stackrel{C}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$
- Jednoduché parciální zlomky (tj. s lineárním polynomem ve jmenovateli) rozvíjíme pomocí známého součtu geometrické řady.
- Správný střed si vyrobíme přepsáním $z = (z - z_0) + z_0$.
- Parciální zlomky odpovídající vyšší násobnosti kořene převedeme pomocí integrování na jednoduché, které umíme rozvinout. Následně derivujeme, abychom získali požadovaný rozvoj.

Výsledky

Úloha 1: :-)

Úloha 2: (a) $\frac{z+i}{1-3(z+i)^2}$ pro $|z+i| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ ($z_0 = -i$, $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$)

(b) $z^3 e^{z^2} (2z^2 + 1)$ pro každé $z \in \mathbb{C}$ ($z_0 = 0$, $R = \infty$)

(c) $z^2 (\ln(z+5) - \ln 5)$ pro $|z| < 5$ ($z_0 = 0$, $R = 5$)

Úloha 3: (a) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(-5)^{n+1}} (z-3)^{n+1}$ pro $|z-3| < \frac{5}{2}$ (tj. $R = \frac{5}{2}$)

(b) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} n (z+4)^{n-1}$ pro $|z+4| < 2$ (tj. $R = 2$)

(c) $f(z) = e^6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (z-2)^{n+4}}{n!}$ pro každé $z \in \mathbb{C}$ (tj. $R = \infty$)

(d) $f(z) = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z+1)^{n+5} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^{n+5}}{2^{n+1}}$ pro $|z+1| < 1$ (tj. $R = 1$)