

Komplexní analýza a transformace 2024/2025

Domácí úkol 6

Úloha 1. *Klasifikujte všechny izolované singularity funkce*

$$f(z) = \frac{\sin z + z - \pi}{z^2(z - \pi)^4}.$$

Vzorový příklad k Úloze 8 z Moodlu

Úloha 2. *Klasifikujte všechny izolované singularity funkce*

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^5(1 - e^{iz})}.$$

Laurentovy řady

Připomenutí.

- **Laurentova řada** je řada tvaru

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

kde $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ je daná číselná posloupnost (tzv. **koefficienty Laurentovy řady**), z je proměnná a z_0 je pevně dané číslo (tzv. **střed Laurentovy řady**).

- Narozdíl od mocninných řad Laurentova řada obsahuje i záporné mocniny $(z - z_0)$.
 - Laurentovy řady konvergují na mezikružích.
 - ★ $P(z_0; r; R)$, kde z_0 je střed, r je vnitřní poloměr a R je vnější poloměr.
 - ★ Speciálně $P(z_0; 0; R)$ je prstencové okolí bodu z_0 , tj. otevřený kruh se středem v z_0 a poloměru R bez svého středu.
 - Při rozvoji racionální funkce do Laurentovy řady na prstencovém okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ postupujeme stejně jako u mocninných řad.
-

Klasifikace izolovaných singularit

Připomenutí.

- Nechť $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ je Laurentův rozvoj funkce f na prstencovém okolí izolované singularity $z_0 \in \mathbb{C}$. Rozlišujeme tři typy izolovaných singularit.
 - (1) Pokud $a_n = 0$ pro každé $n < 0$, pak z_0 je **odstranitelná singularita**.
 - ★ $f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$ na prstencovém okolí z_0
 - (2) Pokud $a_{-k} \neq 0$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ a $a_n = 0$ pro každé $n < -k$, pak z_0 je **pól řádu k** .
 - ★ $f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$ na prstencovém okolí z_0 , kde $a_{-k} \neq 0$
 - (3) Pokud $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho $n < 0$, pak z_0 je **podstatná singularita**.
- Máme-li k dispozici Laurentův rozvoj (na správném prstencovém okolí!), vyčteme typ izolované singularity z rozvoje.
- Pokud ne, často se hodí následující pravidlo. Uvažme funkci $f = \frac{g}{h}$, přičemž g má v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ kořen násobnosti $k \in \mathbb{N}_0$ a h má v bodě z_0 kořen násobnosti $l \in \mathbb{N}$. Potom f má v z_0 :
 - ★ odstranitelnou singularitu, pokud $k \geq l$;
 - ★ pól řádu $l - k$, pokud $k < l$.
- Funkce $f \neq 0$, která je holomorfní na okolí $z_0 \in \mathbb{C}$, má v z_0 **kořen násobnosti $k \in \mathbb{N}_0$** , pokud $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ a $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.
 - ★ Polynom $(z - z_0)^k$, $k \in \mathbb{N}$, má v bodě z_0 kořen násobnosti k .
- Má-li funkce f v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ kořen násobnosti k a g násobnosti l , potom funkce $f(z)g(z)$ má v bodě z_0 kořen násobnosti $k + l$.

Reziduum

Připomenutí.

- Nechť $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ je Laurentův rozvoj funkce f na prstencovém okolí izolované singularity $z_0 \in \mathbb{C}$. Koeficient a_{-1} (tj. koeficient u $(z - z_0)^{-1}$) nazýváme **reziduem** funkce f v bodě z_0 a značíme $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = a_{-1}$.
- Máme-li k dispozici Laurentův rozvoj (na správném prstencovém okolí!), vyčteme reziduum z rozvoje.
- Pokud ne, často se hodí následující pravidla pro výčet reziduí.
 - ★ **Má-li $f(z)$ v bodě z_0 pól řádu $k \in \mathbb{N}$, potom**

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^k f(z)]^{(k-1)}.$$

- ★ **Je-li funkce f tvaru $f = \frac{g}{h}$, kde g je holomorfní na okolí z_0 a h má v bodě z_0 jednonásobný kořen, potom**

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

- ★ **Reziduum v izolované singularitě je vždy dobře definované komplexní číslo. Tvrdit, že reziduum „neexistuje“ nebo je „nekonečné“ nedává žádný smysl...**