

Komplexní analýza a transformace 2024/2025

Domácí úkol 8

Úloha 1. *Spočtěte*

$$\int_C \left(\frac{1}{z \sin z} + \frac{e^{\sin z}}{z + 3} \right) dz,$$

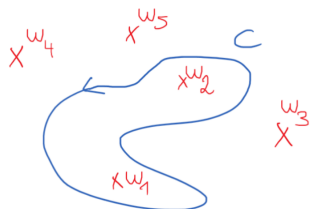
kde C je kladně orientovaná hranice trojúhelníka s vrcholy -2 , $\frac{3\pi}{2} + 2i$, $\frac{3\pi}{2} - 2i$.

Věty pro uzavřené křivky

Připomenutí.

- **Reziduová věta:** Je-li Ω jednoduše souvislá oblast, C je **kladně orientovaná** Jordanova křivka ležící v Ω , $S \subset \text{Int } C$ je konečná množina a f je holomorfní na $\Omega \setminus S$, pak

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{\omega \in S} \text{res}_\omega f(z).$$



$$\int_C f(z) dz = 2\pi i (\text{res}_{w_1} f(z) + \text{res}_{w_2} f(z))$$

- **Cauchyova věta:** Je-li Ω jednoduše souvislá oblast a f je holomorfní na Ω , pak pro každou uzavřenou křivku $C \subset \Omega$

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

Integrály typu $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx$

Připomenutí.

- Nechť P, Q jsou **nenulové** polynomy, $\alpha \in \mathbb{R}$. Nechť $\text{st } Q \geq \text{st } P + 1$ (pokud $\alpha = 0$, tak $\text{st } Q \geq \text{st } P + 2$) a Q nemá žádné reálné kořeny. Potom
(a) **pokud $\alpha \geq 0$** , pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{w \in S_+} \text{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z},$$

kde

$$S_+ = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0, \text{Im } z > 0\};$$

- (b) **pokud $\alpha < 0$** , pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = -2\pi i \sum_{w \in S_-} \text{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z},$$

kde

$$S_- = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0, \text{Im } z < 0\}.$$

- Obdobné tvrzení platí i pokud má Q na reálné ose jednonásobné kořeny. **Přičítá** nebo **odečítá** se

$$\pi i \sum_{w \in S_0} \text{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z},$$

kde

$$S_0 = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0, \text{Im } z = 0\}.$$