

Komplexní analýza a transformace 2025/2026

Domácí úkol 9

Úloha 1. *Určete*

$$\mathcal{Z}[n \cos(\frac{\pi}{2}n)](z).$$

Z-transformace

Připomenutí.

- **Z-transformace** posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ je funkce

$$\mathcal{Z}[a_n](z) = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n},$$

kteřá je holomorfní na jistém okolí nekonečna.

- Koeficienty posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ tedy kódují koeficienty u $(-n)$ tých mocnin z . Koeficient a_0 je absolutní člen, a_1 je koeficient u z^{-1} , a_2 je koeficient u z^{-2} , a_3 je koeficient u z^{-3} atd.

- **Základní aritmetika Z-transformace:**

★ Z-transformace je lineární.

★ Pro $\alpha \neq 0$ platí $\mathcal{Z}[\alpha^n a_n](z) = \mathcal{Z}[a_n]\left(\frac{z}{\alpha}\right)$. [škálování vzoru]

- **Pár známých obrazů:**

★ Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ platí $\mathcal{Z}[\alpha^n](z) = \frac{z}{z-\alpha}$, speciálně tedy $\mathcal{Z}[1](z) = \frac{z}{z-1}$.

★ $\mathcal{Z}[n](z) = \frac{z}{(z-1)^2}$.

★ Pro $\omega \in \mathbb{C}$ jest $\mathcal{Z}[\sin(\omega n)](z) = \frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$ a $\mathcal{Z}[\cos(\omega n)](z) = \frac{z^2 - z \cos \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$.

- **Pravidlo o derivaci obrazu:**

$$\mathcal{Z}[na_n](z) = -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[a_n](z)$$

- **Pravidlo o obrazu posunu (vlevo):**

$$\mathcal{Z}[a_{n+k}](z) = z^k \mathcal{Z}[a_n](z) - a_0 z^k - a_1 z^{k-1} - \dots - a_{k-1} z \quad \text{kde } k \in \mathbb{N}$$

Speciálně:

$$\mathcal{Z}[a_{n+1}](z) = z \mathcal{Z}[a_n](z) - a_0 z$$

$$\mathcal{Z}[a_{n+2}](z) = z^2 \mathcal{Z}[a_n](z) - a_0 z^2 - a_1 z$$

$$\mathcal{Z}[a_{n+3}](z) = z^3 \mathcal{Z}[a_n](z) - a_0 z^3 - a_1 z^2 - a_2 z$$

★ Posloupnost $(a_{n+k})_{n=0}^{\infty}$, kde $k \in \mathbb{N}$, odpovídá posunu posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ doleva o k pozic:

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (a_0, a_1, a_2, \dots) \xrightarrow{\text{posun doleva o } k} (a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots) = (a_{n+k})_{n=0}^{\infty}.$$

- **Konvoluce posloupností** $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost $(c_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}$, kde

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Pro obraz konvoluce platí:

$$\mathcal{Z}[a_n * b_n](z) = \mathcal{Z}[a_n](z) \mathcal{Z}[b_n](z)$$

- **Inverzní Z-transformace.** K dané funkci $F(z) \in H_{\infty}$ chceme najít posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ tak, aby $\mathcal{Z}[a_n](z) = F(z)$.

★ Jedna možnost je najít rozvoj funkce $F(z)$ do Laurentovy řady $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ konvergující na okolí nekonečna a z ní vyčíst koeficienty $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

★ Druhá možnost je využít integrálního vyjádření koeficientů v Laurentově rozvoji, což vede na křivkový integrál, který lze často spočítat pomocí reziduové věty. Speciálně pro racionální funkci $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, kde $\text{st } Q \geq \text{st } P$, dostaneme

$$a_n = \sum_{z_j} \text{res}_{z_j} \frac{P(z)}{Q(z)} z^{n-1},$$

kde z_j jsou všechny póly funkce $\frac{P(z)}{Q(z)} z^{n-1}$.

– Rychlá metoda pro racionální funkce, kde jmenovatel nemá „příliš vysoký stupeň“. Např. pro funkci $F(z) = \frac{z}{z^{58}-1}$ by to ale byla sebevražda (počítali bychom 58 reziduí). Na druhou stranu bychom rychle mohli najít rozvoj do Laurentovy řady na okolí nekonečna.

★ Vždy platí $a_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$.