

Cvičení 8

Téma: Z-transformace

Z-transformace posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$: $Z[a_n](z) = A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$
holomorfní na okolí ∞

1) Mějme posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (1, 0, 1, 0, \dots)$
_{0. 1. 2. 3.}

a) Spočítejte $Z[a_n](z)$.

$$Z[a_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z^2}\right)^n \underset{\substack{\text{liché zmizí} \\ \text{sudé jsou 1}}}{=} \frac{1}{1 - \frac{1}{z^2}} = \frac{z^2}{z^2 - 1}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \left|\frac{1}{z^2}\right| < 1 \\ 1 < |z|^2 = |z|^2 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 < |z|$

b) Spočítejte $Z[2^n a_n - n \cdot a_n](z)$

$$Z[\alpha^n a_n](z) = Z[a_n]\left(\frac{z}{\alpha}\right), \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$Z[n a_n](z) = -z \frac{d}{dz} Z[a_n](z)$$

$$Z[2^n a_n - n a_n](z) = Z[2^n a_n](z) - Z[n a_n](z) = \star$$

$$Z[2^n a_n](z) = Z[a_n]\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - 1} = \frac{z^2}{z^2 - 4} \quad | \quad 1 < \left|\frac{z}{2}\right| \Rightarrow 2 < |z|$$

$$Z[n a_n](z) = -z \frac{d}{dz} Z[a_n](z) = -z \left(\frac{z^2}{z^2 - 1}\right)' = -z \frac{2z(z^2 - 1) - z^2 \cdot 2z}{(z^2 - 1)^2} = \frac{2z^2}{(z^2 - 1)^2} \quad | \quad 1 < |z|$$

$$\star = \frac{z^2}{z^2 - 4} - \frac{2z^2}{(z^2 - 1)^2} \quad | \quad 2 < |z|.$$

$$\text{Konvoluce: } (a_n) * (b_n) = \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)_{n=0}^{\infty}$$

c) Nalezněte posloupnost $(a_n) * (b_n)$, kde $(b_n)_{n=0}^{\infty} = (1, 0, 0, 0, \dots)$.

Členy konvoluce

$$a_0 \cdot \boxed{b_0} = a_0 \cdot 1 = a_0$$

$$a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot \boxed{b_0} = a_1 \cdot 1 = a_1$$

$$a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot \boxed{b_0} = a_2 \cdot 1 = a_2$$

$$(a_n) * (b_n) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot b_{n-k} \right)_{n=0}^{\infty} \underset{n-k=0 \Rightarrow n=k}{=} \left(a_n \cdot b_0 \right)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$$

d) Nalezněte posloupnost $(a_n) * (b_n)$, kde $(b_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 0, 0, 0, \dots)$.

Členy konvoluce

$$a_0 \cdot b_0 = a_0 \cdot 0 = 0$$

$$a_0 \cdot \boxed{b_1} + a_1 \cdot b_0 = a_0 \cdot 1 = a_0$$

$$a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot \boxed{b_1} + a_2 \cdot b_0 = a_1 \cdot 1 = a_1$$

$$(a_n) * (b_n) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot b_{n-k} \right)_{n=0}^{\infty} \underset{n-k=1 \Rightarrow k=n-1}{=} \left(a_{n-1} \cdot b_1 \right)_{n=1}^{\infty} = (a_{n-1})_{n=1}^{\infty} \left. \begin{array}{l} 0, n=0 \\ \downarrow a_n \end{array} \right\} (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$$

e) Spočítejte $\mathcal{Z}[(a_m) * (b_m)](z)$, kde $(b_m)_{m=0}^{\infty} = (0, 1, 0, 0, 0, \dots)$.

• pomocí d): $\mathcal{Z}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \end{pmatrix}\right](z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2m+1}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z^2}\right)^m = \frac{1}{z} \cdot \frac{z^2}{z^2-1} = \frac{z}{z^2-1}, |z|>1$

• pomocí $\mathcal{Z}[(a_m) * (b_m)](z) = \mathcal{Z}[a_m](z) \cdot \mathcal{Z}[b_m](z)$.

$$\mathcal{Z}[b_m](z) = \mathcal{Z}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 2 & \dots \end{pmatrix}\right](z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{z^m} = \frac{1}{z^1} = \frac{1}{z}$$

$$\mathcal{Z}[(a_m) * (b_m)](z) = \mathcal{Z}[a_m](z) \cdot \mathcal{Z}[b_m](z) = \frac{z^2}{z^2-1} \cdot \frac{1}{z} = \frac{z}{z^2-1}, |z|>1.$$

2) Nalezněte $\mathcal{Z}[a_m](z)$, kde $a_m = \sum_{k=0}^m 2^k (m-k+1)$.

Řešení

$$\left(\sum_{k=0}^m 2^k \cdot (m-k+1)\right)_{m=0}^{\infty} = (2^m)_{m=0}^{\infty} * (m+1)_{m=0}^{\infty}$$

$$\mathcal{Z}[\alpha^m](z) = \frac{z}{z-\alpha}, \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\mathcal{Z}[m](z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\mathcal{Z}[2^m](z) = \frac{z}{z-2}, |z|>2$$

$$\mathcal{Z}[m+1](z) = z \mathcal{Z}[m](z) - 0 \cdot z^1 = z \cdot \mathcal{Z}[m](z) = \frac{z^2}{(z-1)^2}, |z|>1$$

$$\mathcal{Z}[a_{m+k}](z) = z^k \mathcal{Z}[a_m](z) - a_0 \cdot z^k - \dots - a_{k-1} z$$

$$\mathcal{Z}[a_m](z) = \mathcal{Z}[(2^m) * (m+1)](z) = \mathcal{Z}[2^m](z) \cdot \mathcal{Z}[m+1](z) = \frac{z}{z-2} \cdot \frac{z^2}{(z-1)^2} = \frac{z^3}{(z-2)(z-1)^2}, |z|>2.$$

Poloměry se určují z původních $\mathcal{Z}$ -transformací ($|z/2|<1$ a $\mathcal{Z}[m]$ je od $\mathcal{Z}[1]$: $|1/2|<1$)

3) Je dána posloupnost $(a_m)_{m=0}^{\infty}$, kde $a_m = \frac{m-3^m}{m!}$.

a) Nalezněte $\mathcal{Z}[a_m](z)$.

Řešení: $a_m = m \cdot \frac{1}{m!} - 3^m \frac{1}{m!}$

$$\mathcal{Z}[a_m](z) = \mathcal{Z}\left[m \cdot \frac{1}{m!}\right](z) - \mathcal{Z}\left[3^m \frac{1}{m!}\right](z) \stackrel{\text{derivace obrazu - škalování (viz výše)}}{=} -z \frac{d}{dz} \left(\mathcal{Z}\left[\frac{1}{m!}\right](z) \right) - \mathcal{Z}\left[\frac{1}{m!}\right]\left(\frac{z}{3}\right) = \star$$

Potřebujeme tedy:

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{m!}\right](z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{z^m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^m}{m!} = e^{\frac{1}{z}}, \frac{1}{z} \in \mathbb{C} \Rightarrow z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

$$\star = -z \left(e^{\frac{1}{z}}\right)' - e^{\frac{1}{z/3}} = -z \cdot e^{\frac{1}{z}} \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right) - e^{\frac{3}{z}} = \frac{1}{z} \cdot e^{\frac{1}{z}} - e^{\frac{3}{z}}, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

b) Nalezněte $\mathcal{Z}[a_{m+2}](z)$.

Řešení: $a_0 = 0 \cdot \frac{1}{0!} - 3^0 \cdot \frac{1}{0!} = 0 - 1 \cdot 1 = -1$, $a_1 = 1 \cdot \frac{1}{1!} - 3^1 \cdot \frac{1}{1!} = 1 - 3 = -2$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[a_{m+2}](z) &= z^2 \mathcal{Z}[a_m](z) - z^2 a_0 - z a_1 = z^2 \left(\frac{1}{z} e^{\frac{1}{z}} - e^{\frac{3}{z}}\right) - z^2 \cdot (-1) - z \cdot (-2) = \\ &= z e^{\frac{1}{z}} - z^2 e^{\frac{3}{z}} + z^2 + 2z, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

4) Nalezněte inverzní $\mathcal{Z}$ -transformaci funkce $F(z)$

a) $F(z) = \frac{1}{z^{100} + 1}$

Řešení stupeň polynomu ve jmenovateli je moc vysoký - vzorcem se nevyplatí kvůli počtu/násobnosti kořenů $\rightarrow$ nalezneme rozvojem ∞

$$\frac{1}{z^{100} + 1} = \frac{1}{z^{100}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{z^{100}}} = \frac{1}{z^{100}} \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{1}{z^{100}})} = \frac{1}{z^{100}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^{100k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^{100 \cdot k + 100}}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}[F(z)]_{(m)} = a_m = \begin{cases} (-1)^{l+1}, m = 100l, l \in \mathbb{N}. \\ 0, m \neq 100l, l \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Dosažování $k=0, 1, 2, \dots$
 $k=0: \frac{1}{z^{100}}, k=1: \frac{-1}{z^{200}}, k=2: \frac{1}{z^{300}}$

b) $F(z) = \frac{z}{z^2 - 6z + 8}$

Řešení zde se vyplatí vzoreček pro koeficient Laur. řady

$$\mathcal{Z}^{-1}[F(z)]_{(m)} = a_m = \sum_{\text{wpoly}} \text{res}_w \left(\frac{z \cdot z^{m-1}}{(z-2)(z-4)} \right) =$$

2 je pól
4 je pól
0 není prožďávk

$$= \text{res}_2 \frac{\overset{\text{holom.}}{z^m}}{\underset{\text{n-n.s.k.}}{(z-2)(z-4)}} + \text{res}_4 \frac{\overset{\text{holom.}}{z^m}}{\underset{\text{n-n.s.k.}}{(z-2)(z-4)}} = \frac{z^m}{(z-2)^1} \Big|_{z=2} + \frac{z^m}{(z-4)^1} \Big|_{z=4} =$$

$$= \frac{2^m}{-2} + \frac{4^m}{2} = \frac{1}{2} (4^m - 2^m) = 2^{m-1} (2^m - 1), m \in \mathbb{N}_0$$

Alternativně limitou $a_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{z^2 - 6z + 8} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{z}}{1 - \frac{6}{z} + \frac{8}{z^2}} = \frac{0}{1} = 0$ stejně jako

b) Je dána funkce $F(z) = \ln\left(1 + \frac{4}{z^2}\right) - \frac{1}{3z-2}$. (příklad navíc!)

a) Nalezněte rozvoj $F(z)$ do Laurentovy řady na okolí ∞ .

Řešení

$$\ln\left(1 + \frac{4}{z^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(1 + \frac{4}{z^2} - 1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 4^n}{n \cdot z^{2n}}, \left|1 + \frac{4}{z^2} - 1\right| < 1 \Rightarrow 4 < |z|^2 \Rightarrow 2 < |z|$$

$$\frac{1}{3z-2} = \frac{1}{3z} \frac{1}{1 - \frac{2}{3z}} = \frac{1}{3z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1} z^{n+1}}, \left|\frac{2}{3z}\right| < 1 \Rightarrow \frac{2}{3} < |z|$$

$$\ln\left(1 + \frac{4}{z^2}\right) - \frac{1}{3z-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 4^n}{n \cdot z^{2n}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1} z^{n+1}}, \quad 2 < |z| \quad \left(\frac{2}{3} < 2 \text{ přejíší}\right)$$

b) Určete členy posloupnosti a_0, a_1, a_2 inverzní $\mathcal{Z}$ -transformace funkce $F(z)$

Řešení

Inverzní $\mathcal{Z}$ -transformace odpovídá koeficientům v Laurentově řadě u

$$\frac{0}{z^0} - \frac{\frac{2^0}{3^1}}{z^1} + \left(\frac{(-1)^0 4^1}{1} - \frac{2^1}{3^2} \right) \frac{1}{z^2} + \dots$$

$$a_0 = 0, a_1 = -\frac{1}{3}, a_2 = 4 - \frac{2}{9} = \frac{34}{9}$$

c) Určete členy posloupnosti c_0, c_1, c_2 , kde $(c_n) = (a_n) * (b_n)$ a $(b_n) = (1)_{n=0}^{\infty}$

Řešení

$$c_0 = a_0 \cdot b_0 = 0 \cdot 1 = 0$$

$$c_1 = a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 = 0 \cdot 1 + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 1 = -\frac{1}{3}$$

$$c_2 = a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0 = 0 \cdot 1 + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 1 + \frac{34}{9} \cdot 1 = -\frac{3}{9} + \frac{34}{9} = \frac{31}{9}$$

6) Pomocí $\mathcal{Z}$ -transformace najděte řešení diferenční rovnice

$$y_{n+2} + 3y_{n+1} + 2y_n = (-2)^n \text{ s počáteční podmínkou } y_0 = 0, y_1$$

Řešení

obě strany rovnice $\mathcal{Z}$ transformujeme

$$\mathcal{Z}[y_{n+2}](z) + 3\mathcal{Z}[y_{n+1}](z) + 2\mathcal{Z}[y_n](z) = \mathcal{Z}[(-2)^n](z) \quad \mathcal{Z}[y_n](z) = Y(z)$$

$$z^2 Y(z) - z^2 y_0 - z y_1 + 3(z Y(z) - z y_0) + 2 Y(z) = \frac{z}{z+2}$$

$$Y(z)(z^2 + 3z + 2) = \frac{z}{z+2} + z^2 y_0 + z y_1 + 3z y_0 = \frac{z}{z+2}$$

$$Y(z) = \frac{z}{(z+2)(z^2 + 3z + 2)} = \frac{z}{(z+2)^2(z+1)}$$

$$y_n = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z+2)^2(z+1)}\right](z) \stackrel{\text{viz výše}}{\downarrow} = \sum_{\omega \text{ póly}} \text{res}_{\omega} \left(\frac{z \cdot z^{n-1}}{(z+2)^2(z+1)} \right) = \text{res}_{-2} \frac{z^n}{(z+2)^2(z+1)} + \text{res}_{-1} \frac{z^n}{(z+2)^2(z+1)}$$

Ohební pól ani pro $n=0$

$$\text{res}_{-2} \frac{z^n}{(z+2)^2(z+1)} \stackrel{\text{pól ř. 2 (vzorec pro res)}}{\downarrow} = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow -2} \left[\cancel{(z+2)^2} \frac{z^n}{\cancel{(z+2)^2(z+1)}} \right]' = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{n z^{n-1} \cdot (z+1) - z^n \cdot 1}{(z+1)^2} =$$

$$= \frac{n(-2)^{n-1} \cdot (-1) - (-2)^n}{1} = (-2)^{n-1} (2-n)$$

$$\text{res}_{-1} \frac{z^n}{(z+2)^2(z+1)} \stackrel{\text{holomorfní (2. vzorec pro res)}}{\downarrow} = \frac{\frac{z^n}{(z+2)^2}}{(z+1)^1} \Big|_{z=-1} = \frac{\frac{(-1)^n}{1^2}}{1} = (-1)^n$$

1. nás. k.

$$y_n = (-2)^{n-1} (2-n) + (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad \left(\text{kontrola: } \begin{matrix} y_0 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 0 \\ y_1 = 1 \cdot 1 + (-1) = 0 \end{matrix} \right)$$

7) Pomocí $\mathcal{Z}$ -transformace najděte řešení diferenční rovnice

$$y_{n+1} + 4y_n = \sum_{k=0}^n 2^k 3^{n-k} \text{ s počáteční podmínkou } y_0 = 4.$$

Řešení

$$\text{rozeznáme konvoluci } \sum_{k=0}^n 2^k \cdot 3^{n-k} = (2^n) * (3^n)$$

$\mathcal{Z}$ -transformace

$$\mathcal{Z}[y_{n+1}](z) - z y_0 + 4 Y(z) = \mathcal{Z}[2^n](z) \cdot \mathcal{Z}[3^n](z) = \frac{z}{z-2} \cdot \frac{z}{z-3}$$

$$Y(z)(z+4) = \frac{z^2}{(z-2)(z-3)} + z y_0 = \frac{z^2}{(z-2)(z-3)} + 4z = \frac{z^2 + 4z(z^2 - 5z + 6)}{(z-2)(z-3)}$$

$$Y(z) = \frac{z(4z^2 - 19z + 24)}{(z-2)(z-3)(z+4)}$$

$$y_m = z^{-1} \left[\frac{z(4z^2 - 19z + 24)}{(z-2)(z-3)(z+4)} \right] (m) = \sum_{w \text{ poly}} \frac{(4z^2 - 19z + 24)z \cdot z^{m-1}}{(z-2)(z-3)(z+4)} = \begin{matrix} \forall m \in \mathbb{N}_0: \\ \text{poly } 2, 3, -4 \end{matrix}$$

$$= \text{res}_2 \frac{(4z^2 - 19z + 24)z^m}{(z-2)(z-3)(z+4)} + \text{res}_3 \frac{(4z^2 - 19z + 24)z}{(z-2)(z-3)(z+4)} + \text{res}_{-4} \frac{(4z^2 - 19z + 24)z}{(z-2)(z-3)(z+4)} =$$

$$= \left. \frac{(4z^2 - 19z + 24)z^m}{(z-3)(z+4)} \right|_{z=2} + \left. \frac{(4z^2 - 19z + 24)z^m}{(z-2)(z+4)} \right|_{z=3} + \left. \frac{(4z^2 - 19z + 24)z^m}{(z-2)(z-3)} \right|_{z=-4} =$$

$$= \frac{(16 - 38 + 24)2^m}{-1 \cdot 6} + \frac{(36 - 57 + 24)3^m}{1 \cdot 7} + \frac{(64 + 76 + 24) \cdot (-4)^m}{-6 \cdot (-7)} = \quad \frac{164}{6 \cdot 7} = \frac{82}{21}$$

$$= -\frac{1}{3}2^m + \frac{3}{7}3^m + \frac{82}{21}(-4)^m, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

$$\text{kontrola: } y_0 = -\frac{1}{3} + \frac{3}{7} + \frac{82}{21} = \frac{-7 + 9 + 82}{21} = \frac{84}{21} = 4.$$