

# CVIČENÍ Z MATEMATICKÉ ANALÝZY 1

## LIMITY FUNKCÍ

1. Dokažte z definice, že funkce  $f(x) = x$  je spojitá na  $\mathbb{R}$ .

2. Spočtete limity funkcí

- |  |  |
|--|--|
| <p>1) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x}, a &gt; 0</math></p>   | <p>2) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg}(\frac{x}{2})}</math></p>   |
| <p>3) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}</math></p>   | <p>4) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin(2x)}</math></p>  |
| <p>5) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}</math></p>   | <p>6) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}</math></p>  |
| <p>7) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos x}{x^2}</math></p>  | <p>8) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}, a &gt; 0</math></p>  |
| <p>9) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x}</math></p>  | <p>10) <math>\lim_{x \rightarrow e} \frac{\log x - 1}{x - e}</math></p>  |
| <p>11) <math>\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}</math></p>   | <p>12) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}</math></p>                             |
| <p>13) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}, n \in \mathbb{N}</math></p>                                       | <p>14) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}</math></p>                                |
| <p>15) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt[3]{x^3+7x} - x)</math></p>  | <p>16) <math>\lim_{x \rightarrow 0+} (e^x - 1)^{\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{x^2}}}</math></p>                                     |
| <p>17) <math>\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{\sqrt{\sin x}} - \cos x}{\sqrt{x}}</math></p>  | <p>18) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)</math></p>                             |
| <p>19) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}, m, n \in \mathbb{N}</math></p>                                | <p>20) <math>\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{\cos(x + \frac{\pi}{6})}</math></p> |
| <p>21) <math>\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\log(1 + \sqrt{x})}</math></p>  | <p>22) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}}</math></p>   |
| <p>23) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x}</math></p>                             | <p>24) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2 \sin(\frac{\pi}{6} + x)}{\operatorname{tg} x}</math></p>                               |
| <p>25) <math>\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - x \right)</math></p> | <p>26) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} \right)</math></p>                  |
| <p>27) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}</math></p>                                       | <p>28) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2}</math></p>  |
| <p>29) <math>\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}</math></p>                            | <p>30) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+x2^x}{1+x3^x} \right)^{\frac{1}{x^2}}</math></p>                                      |
| <p>31) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \log(1+2^x) \log \left( 1 + \frac{3}{x} \right)</math></p>                                | <p>32) <math>\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\operatorname{cotg} \pi x}</math></p>  |

3. Nalezněte  $a, b \in \mathbb{R}$  tak, aby

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b \right) = 0.$$

4. Spočtěte limity posloupností

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n^4 + 2n^3} - \sqrt{n^4 + 1}} \right)^n$

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sqrt[n]{2} - 1 \right)$

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left( 2\pi\sqrt{n^2 + 1} \right)$

VÝSLEDKY

1. 1)  $a$     2) 2    3)  $1/2$     4)  $3/4$     5) 2    6)  $-1$     7)  $-1/2$     8)  $\log a$     9)  $2/3$   
10)  $1/e$     11)  $-1/16$     12)  $3/2$     13)  $1/n$     14)  $1/4$     15)  $7/3$     16) 1    17) 1  
18)  $1/2$     19)  $\frac{mn}{2}(m-n)$     20)  $-24$     21) 1    22) 2    23) 1    24)  $1 - \sqrt{3}$     25)  $1/2$   
26)  $-1/2$     27)  $4/3$     28) 0    29)  $1/e$     30)  $2/3$     31)  $\log 8$     32)  $1/e$   
3.  $a = 1, b = 1/2$   
4. 1)  $e$     2)  $\log 2$     3) 0