Lineární ODR

1) S nekonstantními koeficienty: příklady typu $y' + ay = b$, kde a, b spojité fce

- vzorec z přednášky 18.3
- metoda integračního faktoru

} po bližším zkoumání vyjde stejně

$y'\mu + ay\mu = b\mu$ (rovnici přenásobíme μ, aby nalevo vznikla derivace)

$\boxed{A = \int a}$ $\boxed{\mu = e^A}$

pak $y'e^A + aye^A = e^A \cdot b$

tedy $(ye^A)' = e^A \cdot b$

$\boxed{B = \int e^A b}$

pak $ye^A = B + c$

Tedy $\boxed{y(x) = e^{-A(x)}(B(x) + c)}$

Příklad 1 $y' + y\cos x = e^{-\sin x}(1+x)$, $x \in \mathbb{R}$

$a = \cos x$

$A = \sin x$

$(y \cdot e^{\sin x})' = 1 + x \quad | \int$

$y \cdot e^{\sin x} = x + \frac{x^2}{2} + c$

$y(x) = e^{-\sin x}\left(x + \frac{x^2}{2} + c\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 2 (Bacha na něj)

$x \cdot y' - 3y = x^4$

$\rightsquigarrow y' - \frac{3}{x}y = x^3$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$

Vyřeší se ($\mu = |x|^{-3}$, $y(x) = x^3(x + c)$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$) a slepí se v 0

(neboť $\lim_{x \to 0\pm} y() = 0$, $\lim_{x \to 0\pm} y'(x) = 0$)

=> obecné řešení:

$$y(x) = \begin{cases} x^3(c_1 + x), & (-\infty, 0] \\ x^3(c_2 + x), & (0, \infty] \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2) S konstantními koeficienty

a) homogenní rovnice - určí se charakteristický polynom a fundamentální systém (Věta 18.8)

Příklad 1 $y'' + 4y' + 4y = 0$

ch. p. $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$ => kořeny $\lambda_{1,2} = -2$ (dvojnásobný)

F.S.: e^{-2x}, $x^1 e^{-2x}$ kořen dvojnásobný

Obecné řešení $y(x) = \alpha e^{-2x} + \beta x e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ prvky z lin obalu fundament. systému

Příklad 2 $y'' - 3y' + 2y = 0$

ch.p.: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$, kořeny $2, 1$

F.S.: e^{1x}, e^{2x}

Obecné řešení $y(x) = \alpha e^{x} + \beta^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Příklad 3 $y'' - 6y' + 13y = 0$

ch.p. $\lambda^2 - 6\lambda + 13$, $\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-52}}{2} = 3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{-16} = 3 \pm 2i$

F.S.: $e^{3x}\cos 2x$, $e^{3x}\sin 2x$ 3+2i   2 kořeny => jednou sin, jednou cos

Obecné řešení: $y(x) = \alpha e^{3x}\cos 2x + \beta e^{3x}\sin 2x$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

b) nehomogenní rovnice

- metoda variace konstant - věta z přednášky 18.10 a algoritmus zani

Příklad 4 $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$

Řešení: 1) homogenní rovnice $\lambda^2 + 3\lambda = \lambda(\lambda+3)$, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3$, FS.: $1, e^{-3x}$

2) partikulární řešení: hledáme řešení ve tvaru $y_P(x) = a + be^{-3x}$, kde a, b jsou diferencovatelné funkce na $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{l} \text{FS} \to \\ \text{jeho derivace} \to \end{array} \begin{pmatrix} 1 & e^{-3x} \\ 0 & -3e^{-3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3xe^{-3x} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a' + e^{-3x}b' = 0 \\ -3e^{-3x}b' = 3xe^{-3x} \end{array}$$

na posl. řádku pravá strana

II: $b' = -x$

$\Rightarrow b = -\frac{x^2}{2} + 0$ konst můžu zvolit 0 díky [F.S.], stejně se projeví jako α a β

I: $a' = xe^{-3x}$

$$a = \int \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{x} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{1}{-3}e^{-3x}}}{e^{-3x}}\, dx \overset{\text{P.P.}}{=} \underset{\text{začátek 3. pa}}{-\frac{1}{3}xe^{-3x}} + \underset{\text{nová f-ce}}{\int \frac{1}{3}e^{-3x}} = -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + 0$$

$y_P(x) = -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} - \frac{x^2}{2}e^{-3x}$, $x \in \mathbb{R}$

Obecné řešení: $y(x) = y_P(x) + \text{lin}[F.S.] = -\frac{1}{9}e^{-3x} - \frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{x^2}{2}e^{-3x} + \alpha + \beta \cdot e^{-3x}$

$= -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{x^2}{2}e^{-3x} + \alpha + \tilde{\beta}e^{-3x}$

$\alpha, \tilde{\beta} \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

- speciální pravá strana: tvaru $e^{\mu x}(P(x)\cos \nu x + Q(x)\sin \nu x)$, věta 18.9

Příklad 5 $y''' - y'' - 2y' = e^{2x} + x^3 + 3x^2 + 1$

1) homogenní rovnice $\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda+1)(\lambda-2)$, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = +2$

F.S. $1, e^{2x}, e^{-x}$

2) speciální pravá strana e^{2x}. Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_{P1}(x) = x \cdot e^{2x} \cdot c$ (2 je kořen ch.p. => "x·", polynom st 0 => "·c")

Derivujeme a dosadíme $y'_{P1}(x) = e^{2x} \cdot c \cdot (1 + 2x)$

$y''_{P1}(x) = e^{2x} \cdot 2 \cdot c \cdot (1 + 2x) + e^{2x} \cdot c \cdot 2 = e^{2x}c(4 + 4x)$

Dosazení do $y''' - y'' - 2y' = e^{2x}$ $\quad y'''_{P1}(x) = e^{2x} \cdot c \cdot (8x + 12)$

$e^{2x} \cdot c(8x + 12 - 4x - 4 - 2 - 4x) = e^{2x} \Rightarrow 6ce^{2x} = e^{2x} \Rightarrow c = \frac{1}{6}$, $y_{P1}(x) = \frac{1}{6}xe^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$

3) speciální pravá strana x^3+3x^2+1. Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_{p_2}(x) = (ax^3+bx^2+cx+d)\cdot x = ax^4+bx^3+cx^2+dx$ (0 je kořen ch. p., proto „$\cdot x$“, polynom st. 3)

Derivujeme a dosadíme

$y'_{p_2}(x) = 4ax^3+3bx^2+2cx+d$

$y''_{p_2}(x) = 12ax^2+6bx+2c$

$y'''_{p_2}(x) = 24ax+6b$

$y'''_{p_2} - y''_{p_1} - 2y'_{p_2} = x^3(-8a) + x^2(-6b-12a) + x(-4c-6b+24a) + (-2d-2c+6b)$

Má se to rovnat: x^3+3x^2+1. Pak

$$\left.\begin{aligned} a &= -\frac{1}{8} \\ b &= -\frac{1}{4} \\ c &= -\frac{3}{8} \\ d &= -\frac{7}{8} \end{aligned}\right\} y_{p_2}(x) = -\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{7}{8}x$$

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) = \frac{1}{6}xe^{2x} - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{7}{8}x$$

neboť $(y_{p_1}+y_{p_2})''' - (y_{p_1}+y_{p_2})'' - 2(y_{p_1}+y_{p_2})' = \underbrace{y'''_{p_1} - y''_{p_1} - 2y'_{p_1}}_{=e^{2x}} + \underbrace{y'''_{p_2} - y''_{p_2} - 2y'_{p_2}}_{x^3+3x^2+1} =$

Obecné řešení $y(x) = y_p(x) + \mathrm{lin}[F.S.] = \frac{1}{6}xe^{2x} - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{7}{8}x + \alpha + \beta e^{2x} + \gamma e^{-x}$

$x \in \mathbb{R}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

* Příklad Nalezněte každé maximální řešení rovnice $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$ procházející bodem $[-1, 0] \in \mathbb{R}^2$

Hint: pozor na 0