

Cvičení 4

Úloha 1. Spočtěte parciální derivace funkcí všude, kde existují.

(a) $f(x, y) = x^m y^n$, kde $m, n \in \mathbb{N}$

(b) $f(x, y) = e^{xy}$

(c) $f(x, y, z) = xy + yz + zx$

(d) $f(x, y) = |x| \cdot |y|$

(e) $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$

(f) $f(x, y, z) = x^{\frac{y}{z}}$

(g) $f(x, y) = \sqrt{x + y^2}$

Dále řešte úlohy ze zadání Směrová a parciální derivace (viz Moodle nebo též třetí strana tohoto dokumentu).

Domácí úkol: Úloha 1(d).

Připomenutí

Směrová derivace

- Ať $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{a}$ je vnitřní bod množiny D a $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Vektor $\nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^m$ se nazývá směrová derivace (řádu 1) funkce f v bodě $\mathbf{a}$ podle $\mathbf{v}$, jestliže

$$\nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t}.$$

- Položme $\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$. Potom

$$\nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0),$$

kde $\varphi'(0) = (\varphi'_1(0), \dots, \varphi'_m(0))$.

- $\nabla_{\mathbf{o}} f(\mathbf{a}) = 0$.
- Směrová derivace nemusí být lineární (ale pro hezké funkce je).

Parciální derivace

- Nechť $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a $\mathbf{a}$ je vnitřní bod množiny D . Pak je parciální derivace podle i -té proměnné v bodě $\mathbf{a}$ definována jako $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) := \nabla_{\mathbf{e}_i} f(\mathbf{a})$
- Parciální derivace druhého řádu: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(\mathbf{a})$. Analogicky pro vyšší řády.
- Schwarzova věta: Ať $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Jestliže existují $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a})$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})$ na nějakém okolí bodu $\mathbf{a}$ a jsou spojité v bodě $\mathbf{a}$, potom

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}).$$

- Metoda: pro body, kde se funkce skládá ze známých funkcí, derivujeme parciálně tak, že derivujeme podle dané proměnné a ostatní chápeme jako konstanty. Pro body, kde je funkce dodefinovaná hodnotou, je potřeba počítat parciální derivaci z definice.

Směrová a parciální derivace

Zadání

1. Z definice nalezněte $\nabla_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a})$, jestliže

(a) $f(x, y, z) = x^2y^2(2z + 1)^2$, $\mathbf{a} = (1, -1, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 3)$;

(b) $f(x, y) = \frac{xy}{x+y}$, $\mathbf{a} = (2, -1)$, $\mathbf{v} = (4, 1)$;

(c) $f(x, y) = e^{3x} \cos(x - y)$, $\mathbf{a} = (0, \frac{\pi}{2})$, $\mathbf{v} = (1, 2)$.

2. Ať $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$. Nalezněte všechny vektory $\mathbf{v}$ tak, aby směrová derivace $\nabla_{\mathbf{v}}f(0, 0)$ existovala a tuto derivaci určete.

3. Je dána funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^4+y^4}, & \text{je-li } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{je-li } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Nalezněte všechny vektory $\mathbf{v}$ tak, aby směrová derivace $\nabla_{\mathbf{v}}f(0, 0)$ existovala a tuto derivaci určete. Je zobrazení $\mathbf{v} \mapsto \nabla_{\mathbf{v}}f(0, 0)$ lineární? Je funkce f spojitá?

4. Nalezněte všechny parciální derivace (1. řádu) funkce f v bodě $\mathbf{a}$, jestliže

(a) $f(x, y) = x^2 - 3x^2y + 5y^3$, $\mathbf{a} = (-2, 1)$;

(b) $f(x, y) = \sqrt{3x^2 + y}$, $\mathbf{a} = (1, 2)$;

5. Nalezněte všechny parciální derivace (1. řádu) funkce f ve všech bodech, kde existují, jestliže

(a) $f(x, y) = x \sin(xy)$;

(b) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} \cos^2 z + 1$;

(c) $f(t, x, y, z) = x^2y \cos \frac{z}{t}$;

(d) $f(x, y) = \frac{2x-y}{y-3x}$;

(e) $f(x, y) = x^y$;

(f) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;

(g) $f(x, y, z) = xy \ln(xz)$;

(h) $f(x, y) = \int_y^x \cos(e^t) dt$.

6. Vypočtěte všechny parciální derivace (1. řádu) funkce f a určete všechny body, ve kterých jsou spojité, jestliže

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$

7. Ukažte, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$, jestliže

$$f(x, y) = \begin{cases} xy, & |x| \geq |y|, \\ 0, & |x| < |y|. \end{cases}$$

8. Je dána funkce $f(x, y) = \frac{y}{2x+3y}$. Přímým výpočtem ověřte, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$.
9. Vypočítejte všechny parciální derivace 1. a 2. řádu funkce f ve všech bodech, kde existují, jestliže
- (a) $f(x, y) = e^{xy} \sin y$;
 - (b) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$;
 - (c) $f(x, y) = x^3 y^2 - 2xy + \cos(x^2 - y^2)$;
 - (d) $f(x, y) = \sqrt{1 + xy^2}$.
10. Je dána funkce $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Ukažte, že $\Delta f = 0$ na $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.
11. Je dána funkce $f(t, x) = \cos(x - ct) + \sin(y + ct)$, kde $c > 0$. Ukažte, že $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.
12. Ukažte, že $f(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha t}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha t}}$, kde $\alpha > 0$, vyhovuje rovnici $\frac{\partial f}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ na $(0, \infty) \times \mathbb{R}$.
13. Ukažte, že $f(t, x) = e^{-t} \cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)$, kde $\alpha > 0$, vyhovuje rovnici $\frac{\partial f}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ na $\mathbb{R}^2$.

Výsledky

1. Nalezněte $\nabla_{\mathbf{v}} f(a)$. jestliže

(a) $\nabla_{\mathbf{v}} f(a) = 18$;

(b) $\nabla_{\mathbf{v}} f(a) = 8$;

(c) $\nabla_{\mathbf{v}} f(a) = -1$.

2. $\nabla_{\mathbf{v}} f(0, 0)$ existuje právě tehdy, když alespoň jedna komponenta vektoru $\mathbf{v}$ je nulová. V tomto případě je $\nabla_{\mathbf{v}} f(0, 0) = 0$.

3. $\nabla_{(0,0)} f(0, 0) = 0$, $\nabla_{(v_1, v_2)} f(0, 0) = \frac{v_1^2 v_2^3}{v_1^4 + v_2^4}$ pro každé $(v_1, v_2) \neq (0, 0)$. Zobrazení $\mathbf{v} \mapsto \nabla_{\mathbf{v}} f(0, 0)$ není lineární. Funkce f je spojitá.

4. (a) $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 8$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 3$;

(b) $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{3}{\sqrt{5}}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{1}{2\sqrt{5}}$;

5. (a) Pro $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ je $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sin(xy) + xy \cos(xy)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 \cos(xy)$.

(b) Pro $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 \cos^2 z + 1}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{y \cos z}{\sqrt{x^2 + y^2 \cos^2 z + 1}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -\frac{y^2 \sin z \cos z}{\sqrt{x^2 + y^2 \cos^2 z + 1}}.$$

(c) Pro $t \neq 0$ a $x, y, z \in \mathbb{R}$ je

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x, y, z) = \frac{x^2 y z \sin \frac{z}{t}}{t^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, y, z) = 2xy \cos \frac{z}{t},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, x, y, z) = x^2 \cos \frac{z}{t}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(t, x, y, z) = -\frac{x^2 y \sin \frac{z}{t}}{t}.$$

(d) Pro $y \neq 3x$ je $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{(y-3x)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{(y-3x)^2}$.

(e) Pro $x > 0$ a $y \in \mathbb{R}$ je $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \ln x$.

(f) Pro $(x, y) \neq (0, 0)$ je $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

(g) Pro $xz > 0$ a $y \in \mathbb{R}$ je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = y(\ln(xz) + 1), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x \ln(xz),$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{xy}{z}.$$

(h) Pro $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ je $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(e^x)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\cos(e^y)$.

6. Pro $(x, y) \neq (0, 0)$ je $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$. Navíc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Parciální derivace nejsou spojité jen v bodě $(0, 0)$.

$$8. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{6y-4x}{(2x+3y)^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

9. (a) Je-li $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pak

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= ye^{xy} \sin y, & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= e^{xy} (x \sin y + \cos y), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= y^2 e^{xy} \sin y, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= e^{xy} [(x^2 - 1) \sin y + 2x \cos y] \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = e^{xy} (xy \sin y + \sin y + y \cos y). \end{aligned}$$

(b) Je-li $x \neq 0$ a $y \in \mathbb{R}$, pak

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{-y}{x^2 + y^2}, & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{x}{x^2 + y^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

(c) Je-li $(x, y) \in \mathbb{R}$, pak

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y(3x^2y - 2) - 2x \sin(x^2 - y^2) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2 [x^3y + y \sin(x^2 - y^2) - x], \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= -2 [\sin(x^2 - y^2) + 2x^2 \cos(x^2 - y^2) - 3xy^2], \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= 2 [x^3 + \sin(x^2 - y^2) - 2y^2 \cos(x^2 - y^2)] \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 4xy \cos(x^2 - y^2) + 6x^2y - 2. \end{aligned}$$

(d) $1 + xy^2 > 0$, pak

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{y^2}{\sqrt{1 + xy^2}}, & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{xy}{\sqrt{1 + xy^2}}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{-y^4}{4(1 + xy^2)^{\frac{3}{2}}}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{x}{(1 + xy^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{y(xy^2 + 2)}{2(1 + xy^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$