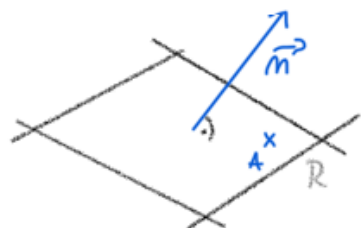


Cvičení 1

- 1) Nalezněte rovnici roviny s normálovým vektorem $(-1, 2, 1)$, která obsahuje bod $(1, 2, 1)$.

Řešení

$$\vec{n} = (-1, 2, 1), \quad A = (1, 2, 1) \in R$$



「Připomeňutí: $ax + by + cz + d = 0$, kde $\vec{n} = (a, b, c)$ a d je určeno bodem.」

$$R: -1x + 2y + 1z + d = 0$$

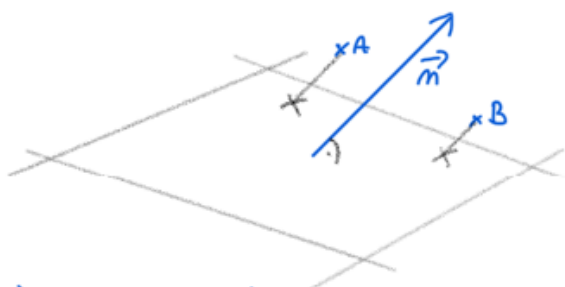
dosadíme bod A: $-1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + d = 0$
 $d = -4$

Závěr

$$R: -x + 2y + z - 4 = 0$$

- 2) Který z bodů $A = (3, 1, 2)$, $B = (2, 3, 1)$ je blíže rovině $x - y = 0$?

Řešení: buď ze znalosti vzorce pro vzdálenost bodu od roviny, nebo odvozením



Z rovnice roviny určíme $\vec{n} = (1, -1, 0)$.

a) odvozením

nalezneme přímku se směrnici $\vec{n}$ procházející bodem A

$$\begin{aligned} p_A: x &= 3 + 1 \cdot t \\ y &= 1 + (-1) \cdot t \\ z &= 2 + 0 \cdot t, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

dosadíme do rovnice roviny a nalezneme společný bod - průsečík

$$(3 + t) - (1 - t) = 0$$

$$2t = -2$$

$$t = -1 \Rightarrow p_A(-1) = (2, 2, 2) \text{ je hledaný průsečík}$$

$$\|A - p_A(-1)\| = \sqrt{(3-2)^2 + (1-2)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}.$$

b) ze vzorečku

Vzdálenost bodu $P = (p_1, p_2, p_3)$ od roviny $R: ax + by + cz + d = 0$ je

$$\frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\text{dist}(B, R) = \frac{|1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 0|}{\sqrt{1 + 1 + 0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Závěr:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{2}, \text{ tedy } B \text{ je blíže rovině } x - y = 0.$$

3) Jsou dány vektory $\vec{a} = (2, 3, 0)$ a $\vec{b} = (1, 0, 3)$. Najděte $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$, $\|\vec{v}\|$ a ukažte, že $\vec{v} \perp \vec{a}, \vec{b}$.

Řešení

vektorový součin (vizte lineární algebra, nebo středoškolsky)

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v} = (9 - 0, 0 - 3, 0 - 3) = (9, -6, -3)$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{9^2 + (-6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{81 + 36 + 9} = \sqrt{126}$$

kolmost ověříme skalárním součinem (vektory kolmé $\Leftrightarrow$ sk. součin 0)

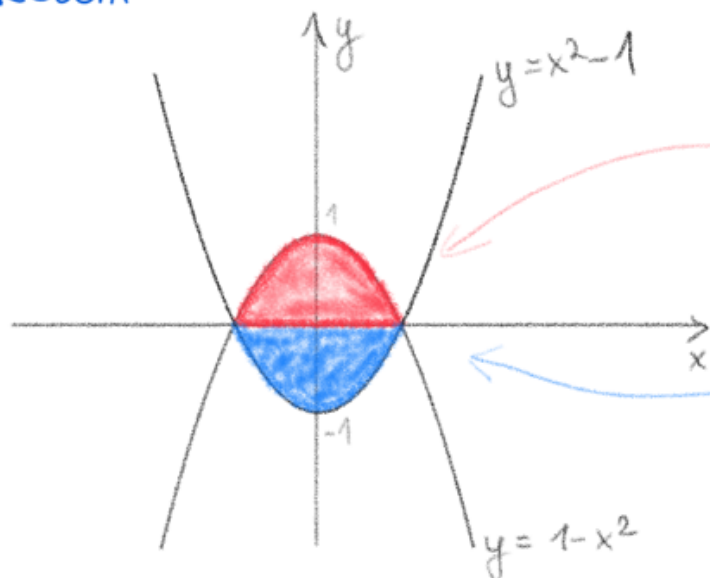
$$\vec{v} \cdot \vec{a} = 9 \cdot 2 + (-6) \cdot 3 + (-3) \cdot 0 = 18 - 18 + 0 = 0$$

$$\vec{v} \cdot \vec{b} = 9 \cdot 1 + (-6) \cdot 0 + (-3) \cdot 3 = 9 + 0 - 9 = 0$$

„jak jistě víme, není to náhoda, vektorový součin 2 vektorů na ně bude vždycky kolmý“

4) Napište množinu $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |y| \leq 1 - x^2\}$

Řešení



nerovnost $|y| \leq 1 - x^2$ rozdělíme na 2 případy a řešíme zvlášť

$$y \geq 0: y \leq 1 - x^2$$

$$y < 0: -y \leq 1 - x^2 \quad | \cdot (-1) \\ y \geq x^2 - 1$$

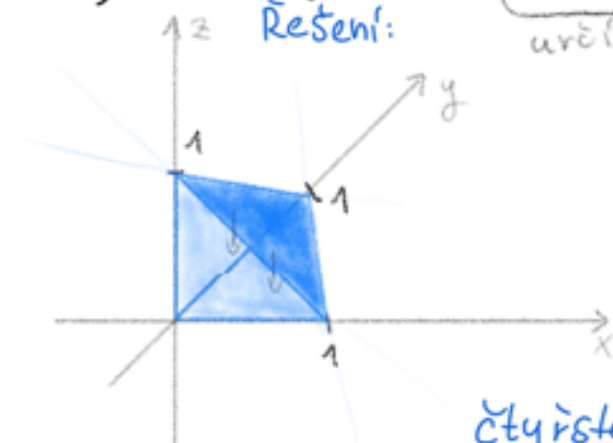
Množina M je tedy sjednocení modré a červené plochy.

$$(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \leq 1 - x^2\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq x^2 - 1\})$$

5) Načrtněte a popište následující množiny v $\mathbb{R}^3$.

a) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \underbrace{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0}_{\text{určí oktant}}, \underbrace{x + y + z \leq 1}_{\text{pod rovinou}}\}$

Řešení:



- rovinu určí 3 LN body,
nabízí se dosadit $y = z = 0 \Rightarrow x = 1$
 $x = z = 0 \Rightarrow y = 1$
 $x = y = 0 \Rightarrow z = 1$

$[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]$

- pod rovinou, neboť $\boxed{z \leq 1 - x - y}$

čtyřlístěn s vrcholy $[0, 0, 0], [1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]$

b) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 - 4y^2 - z = 0\}$

Řešení:

zafixováním souřadnic můžeme přejít k řezu a řešit o dimenzi snazší úlohu

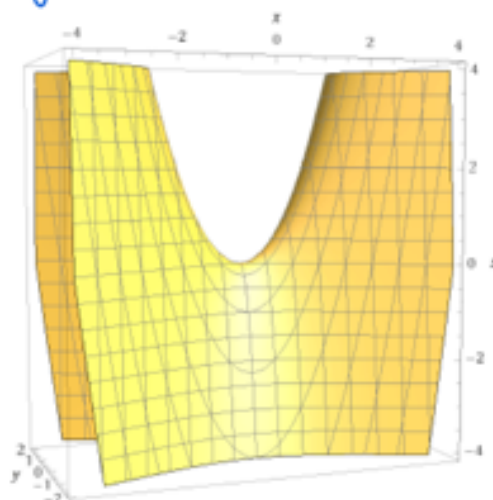
zafixujeme y :

$z = x^2 - 4y^2 \Rightarrow$ parabola s vrcholem $-4y^2$
konstanta (pro $\pm y$ stejné)

zafixujeme $x = 0$:

$z = -4y^2 \Rightarrow$ vrcholy parabol se nacházejí na parabole

hyperbolický paraboloid



c) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 4x^2 + y^2 + z^2 - 24x - 8y + 4z + 55 = 0\}$

Řešení: $(2x)^2 - 24x + 36 + y^2 - 8y + 16 + z^2 + 4z + 4 = 1$

$(2x - 6)^2 + (y - 4)^2 + (z + 2)^2 = 1$

elipsoid se středem v $[3, 4, -2]$

$\hookrightarrow$ koule sešlápnutá v x -ové ose

d) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$

Řešení:



mezistěří s poloměry 1, 2

(koule o poloměru 2 bez koule o poloměru 1)

6) Nalezněte limitu posloupnosti

a) $\vec{x}_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{k-3k^2}{k+k^2} \right)$

Řešení

„posloupnost konverguje $\Leftrightarrow$ konverguje po složkách“

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k-3k^2}{k+k^2} = -3 \end{array} \right\} \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = (0, -3)$$

b) $\vec{x}_k = (1, \sin(\pi k), k)$

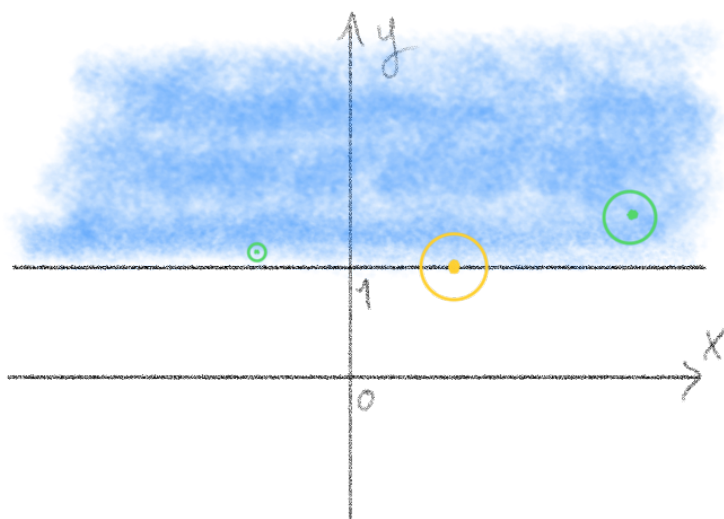
Řešení

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{k \rightarrow \infty} 1 = 1 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \sin(\pi k) = 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} k = \infty \end{array} \right\} \vec{x}_k \text{ diverguje}$$

7) Pro zadané množiny M určete vnitřek, hranici, uzávěr, hromadné body a izolované body a rozhodněte o otevřenosti/uzavřenosti množiny M .

a) $M = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1 \}$

Řešení

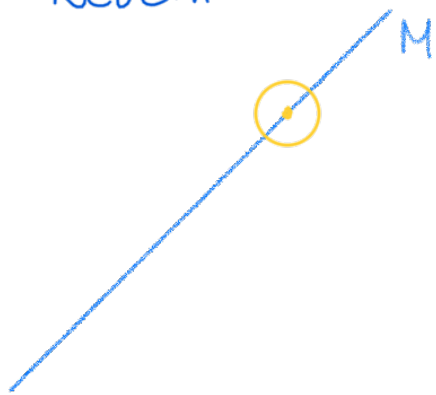


Z definic:

- $\text{Int } M = M$
 $\hookrightarrow M$ je z definice otevřená
- $\partial M = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 1 \}$
- $\bar{M} \stackrel{\text{def}}{=} \partial M \cup M = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 1 \}$
- hromadné body... $\bar{M}$
- izolované body... $\emptyset$

b) M je přímka v $\mathbb{R}^2$

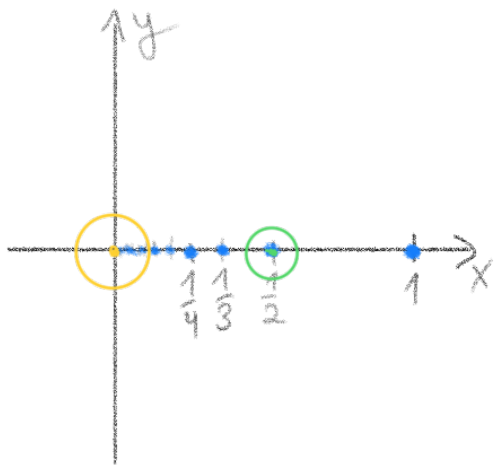
Řešení



- $\text{Int } M = \emptyset$ (kruh ^{okolí} se do M nevejde)
- $\partial M = M$
- $\bar{M} = \partial M \cup M = M$
 $\hookrightarrow M$ je z definice uzavřená
- hromadné body... M
- izolované body... $\emptyset$

c) $M = \{ (\frac{1}{m}, 0) \mid m \in \mathbb{N} \}$

Řešení



- $\text{Int } M = \emptyset$ (kruh se do M nevejde)
- $\partial M = M \cup \{ [0,0] \}$
 (ač $(0,0) \notin M$, M je libovolně blízko)
- $\bar{M} = \partial M \cup M = M \cup \{ [0,0] \}$
- hromadné body... $[0,0]$
- izolované body... M
- M není ani otevřená, ani uzavřená