

Cvičení 2

Téma: Funkce

1) Určete definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\ln(x^2y)}{\sqrt{|y-x|}}$.

Řešení

Definiční obor určíme z definičních oborů elementárních funkcí.

Definiční obor – největší množina pro kterou má předpis funkce smysl, není-li řečeno jinak.

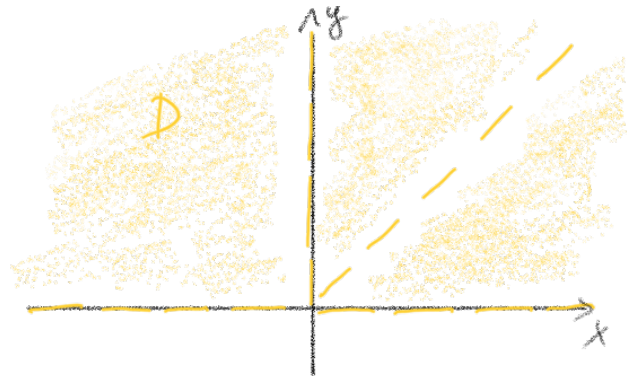
• $\ln(x^2y)$: $x^2y > 0 \Leftrightarrow x \neq 0, y > 0$

• $\frac{1}{\sqrt{|y-x|}}$: $y \neq x$

$\frac{1}{t}$ pro $t \neq 0$, $\sqrt{t}$ pro $t \geq 0$

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2, y > 0, x \neq 0, y \neq x \}$

[Součin 2 čísel je kladný, pokud jsou obě čísla kladná nebo obě čísla záporná. zde x^2 záporné být nemůže]



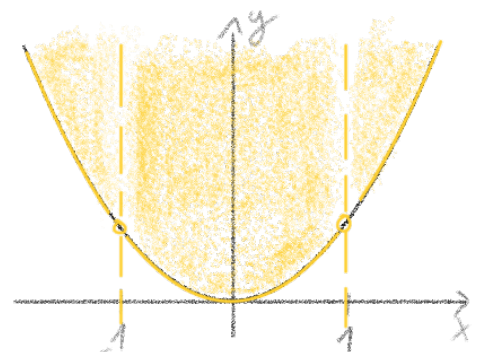
2) Určete definiční obor a obor hodnot funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$.

Řešení

• D : $\sqrt{y-x^2}$: $y-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq x^2$

$\frac{1}{1-x^2}$: $1-x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geq x^2, x \neq \pm 1 \}$



• $f(D)$: • opět využíváme znalosti o elementárních funkcích

• můžeme zafixovat proměnnou

• používáme různé kreativní postupy

zafixujeme

$x=0$: $f(0,y) = \sqrt{y}$, $\sqrt{y}([0,\infty)) = [0,\infty)$

$x=\sqrt{2}$: $f(\sqrt{2},y) = \frac{\sqrt{y-2}}{1-2} = -\sqrt{y-2}$, $-\sqrt{y-2}([2,\infty)) = (-\infty,0]$

Dohromady dostáváme: $f(D) \supset (-\infty,0] \cup [0,\infty) = \mathbb{R} \Rightarrow f(D) = \mathbb{R}$.

3) Najděte definiční obor a hladinu výšky 1 funkce $f(x,y) = \frac{1}{\sin(\pi(x+y))}$.

Řešení:

• D: $\sin(\pi(x+y)) \neq 0 \Leftrightarrow \pi(x+y) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x+y \neq k, k \in \mathbb{Z}$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y \notin \mathbb{Z}\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) = k-x, x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\}$$

• $\text{lev}(f,1)$:

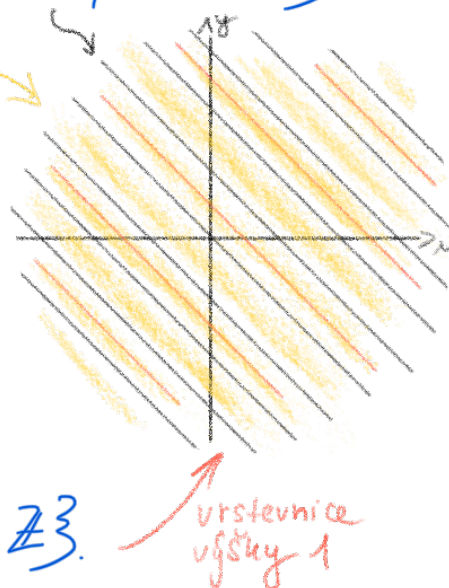
Položme $\frac{1}{\sin(\pi(x+y))} = 1$.

Pak $1 = \sin(\pi(x+y)) \Leftrightarrow \pi(x+y) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$x+y = \frac{1}{2} + 2k$$

$$y = \frac{1}{2} + 2k - x$$

Tedy $\text{lev}(f,1) = \{(x, \frac{1}{2} + 2k - x), x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\}$.

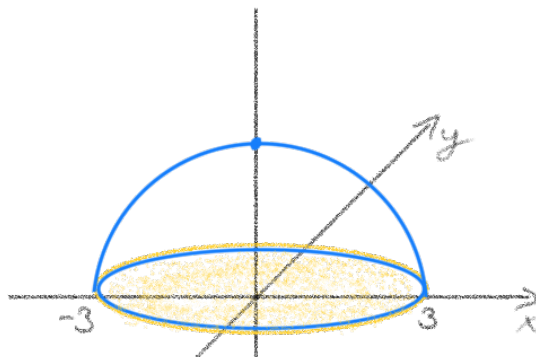


4) Určete definiční obor a načrtněte graf funkce $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$. Dále určete hladiny výšky $c \geq 0$.

Řešení:

• D: $9 - x^2 - y^2 \geq 0$ *kruh*
 $9 \geq x^2 + y^2$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 9\}$$



• graf: $f(0,0) = 3$

na kružnici $k(0,3)$: $f = 0$

obecně: položme $z = \sqrt{9-x^2-y^2}$. Pak • $z \geq 0$

• $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Tedy se jedná o polovinu sféry $S(0,3)$.

• hladina: pro $c \geq 0$: $\sqrt{9-x^2-y^2} = c$

$$9 - x^2 - y^2 = c^2$$

$$x^2 + y^2 = 9 - c^2 \dots \text{kružnice o poloměru } \sqrt{9-c^2}$$

$$\text{lev}(f,c) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 9 - c^2\} = \begin{cases} k(0, \sqrt{9-c^2}), & c \in [0, 3), \\ \{(0,0)\}, & c = 3, \\ \emptyset, & c > 3. \end{cases}$$

5) Načrtněte hladinu funkce $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ výšky 1.

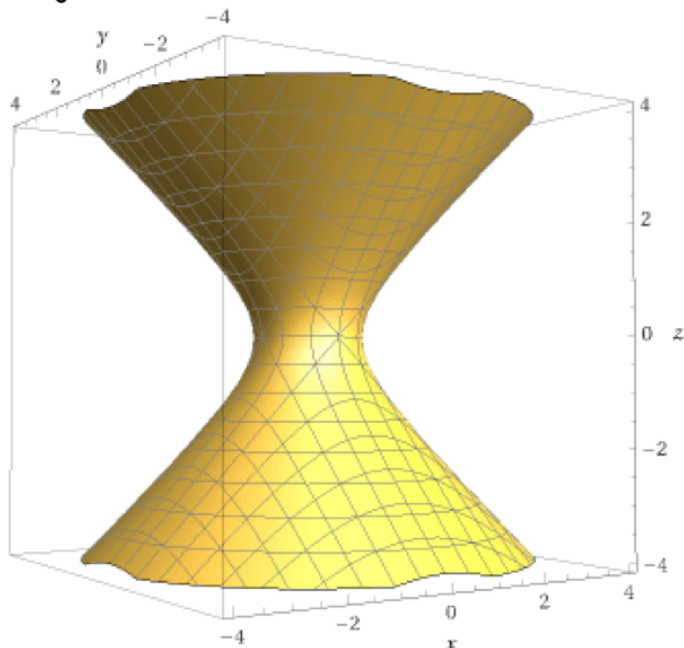
Řešení:

$$x^2+y^2-z^2=1$$

$$x^2+y^2=1-z^2$$

kružnice o poloměru

$$\sqrt{1-z^2} \begin{cases} \text{pro } z=0: r=1, \\ \text{pro } z \rightarrow \pm\infty: r \approx |z|. \end{cases}$$



6) Určete definiční obor, obor hodnot a hladinu výšky c funkce $f(x,y)=\frac{\sqrt{y+x+1}}{x-1}$.

Řešení:

$$\bullet \sqrt{y+x+1}: y+x+1 \geq 0 \\ y \geq -x-1$$

$$\frac{1}{x-1}: x \neq 1$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: y \geq -x-1, x \neq 1\}$$

• obor hodnot: zafixujeme

$$x=2: f(2,y)=\sqrt{y+3}, \sqrt{y+3}([-3,\infty))=[0,\infty)$$

$$x=0: f(0,y)=-\sqrt{y+1}, -\sqrt{y+1}([-1,\infty))=(-\infty,0]$$

$$\left. \begin{array}{l} [0,\infty) \\ (-\infty,0] \end{array} \right\} f(D)=\mathbb{R}$$

• hladina výšky $c \in \mathbb{R}$

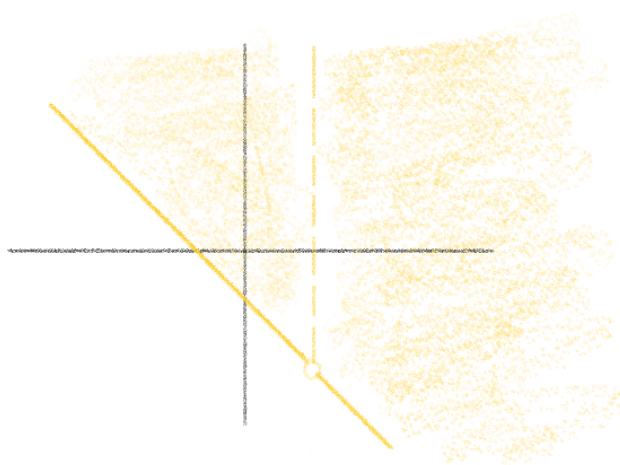
$$\frac{\sqrt{y+x+1}}{x-1} = c \quad | \cdot (x-1) \quad \boxed{x \neq 1}$$

$$\sqrt{y+x+1} = c \cdot (x-1) \quad |^2 \dots \text{pozor na znaménka! } c \cdot (x-1) \geq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} c > 0 \\ x-1 > 0 \\ c = 0, x \neq 1 \\ c < 0 \\ x-1 < 0 \end{array} \right.$$

$$y+x+1 = c^2(x-1)^2$$

$$y = c^2(x-1)^2 - x - 1$$

$$\text{lev}(f|c) = \begin{cases} \{(x, c^2(x-1)^2 - x - 1), x > 1\}, & c > 0, \\ \{(x, -x - 1), x \neq 1\}, & c = 0, \\ \{(x, c^2(x-1)^2 - x - 1), x < 1\}, & c < 0. \end{cases}$$



7) Určete definiční obor vektorového pole $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$ a pole znázorněte v rovině.

Řešení:

- $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

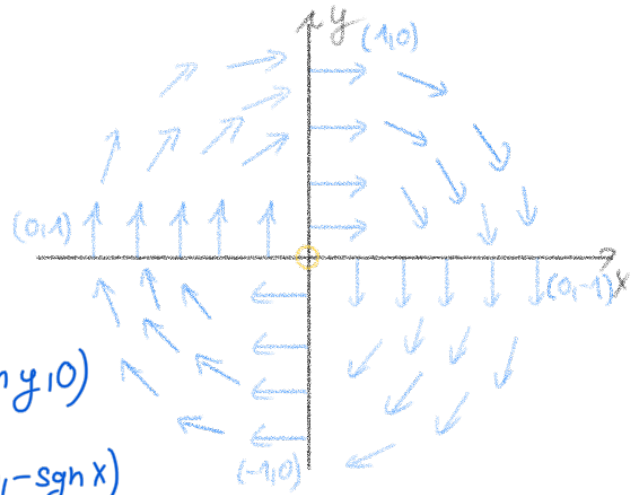
- podíváme se nejprve na osy:

$$x=0: \vec{F}(0,y) = \left(\frac{y}{\sqrt{y^2}}, 0 \right) = \left(\frac{y}{|y|}, 0 \right) = (\operatorname{sgn} y, 0)$$

$$y=0: \vec{F}(x,0) = \left(0, \frac{-x}{\sqrt{x^2}} \right) = \left(0, -\frac{x}{\sqrt{x^2}} \right) = (0, -\operatorname{sgn} x)$$

v kvadrantech doplníme podle znamének

Pozn.: $\|\vec{F}(x,y)\| = 1, (x,y) \in D.$



8) Určete definiční obor a obor hodnot vektorové funkce $f(x,y,z) = \left(\arctg y, \frac{\ln z}{x} \right)$. Dále najděte množinu $f^{-1}((0,0))$.

Řešení:

- $\arctg y: y \in \mathbb{R}$
 $\ln z: z \in (0, \infty)$
 $\frac{1}{x}: x \neq 0$

$$\left. \begin{array}{l} \arctg y: y \in \mathbb{R} \\ \ln z: z \in (0, \infty) \\ \frac{1}{x}: x \neq 0 \end{array} \right\} D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z > 0, x \neq 0 \}$$

- $\arctg(\mathbb{R}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$
 $\ln((0, \infty)) = \mathbb{R}$
 x můžeme vzít 1

$$\left. \begin{array}{l} \arctg(\mathbb{R}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \\ \ln((0, \infty)) = \mathbb{R} \\ x \text{ můžeme vzít } 1 \end{array} \right\} f(D) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \times \mathbb{R}$$

- $\arctg y = 0 \Leftrightarrow y = 0$
 $\frac{\ln z}{x} = 0 \Leftrightarrow z = 1, x \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} \arctg y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \\ \frac{\ln z}{x} = 0 \Leftrightarrow z = 1, x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} f^{-1}((0,0)) = \{ (x, 0, 1), x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \}$$