Cvičení 3 — Téma: Limity a spojitost funkcí

1) Spočtěte limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy-y}{(x-1)^2+y^2}$.

Řešení

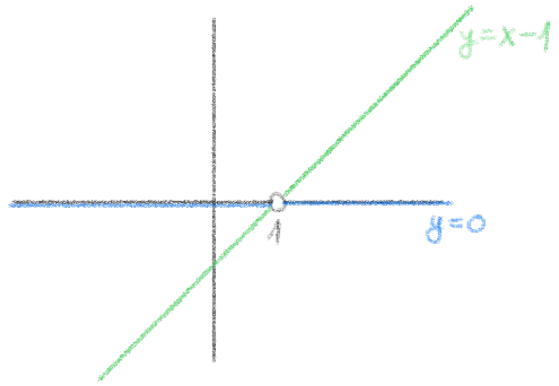
$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$, $(1,0)$ je hromadný bod $\Rightarrow$ má smysl hledat limitu.

⌈Strategie: restrikcí na nějakou množinu najdeme podezření na limitu, poté s možným využitím podezřelé limity dokážeme nebo vyvrátíme existenci limity.⌋

Vezměme $y=0$

bez této vlastnosti nemá smysl takovou množinu volit

(tedy $\{(x,0), x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\}$ a $(1,0)$ je hromadný bod)



$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ y=0}} \frac{xy-y}{(x-1)^2+y^2} = \lim_{x\to 1} \frac{0}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} 0 = 0.$$

⌈Nyní 0 je podezřelá limita, pokud limita existuje, je to z jednoznačnosti 0.⌋

Zkusme jinou množinu: ⌈$\frac{xy-y}{(x-1)^2+y^2} = \frac{y(x-1)}{(x-1)^2+y^2} \Rightarrow$ hodí se $y=x-1$⌋

Vezměme $y=x-1$ (tedy $\{(x,x-1), x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\}$, $(1,0)$ je hromadný bod)

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ y=x-1}} \frac{y(x-1)}{(x-1)^2+y^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)^2+(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{2(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Tedy z věty o jednoznačnosti limity limita neexistuje.

2) Spočtěte limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$.

Řešení:

$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $(0,0)$ je hromadný bod D.

Vezměme $x=0$ ($(0,0)$ je hromadný bod).

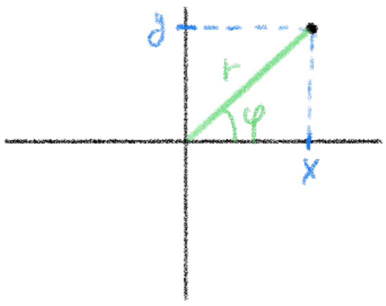
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{y^2} = \lim_{y\to 0} y^2 = 0$$ … podezřelá limita

<u>1. METODA</u> Věta o 2 policajtech (VO2P) ⌈využíváme podezření $\lim = 0$⌋

$$0 \longleftarrow 0 \le \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \le \frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} = x^2+y^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{\text{spojitost}} 0.$$

Z VO2P pro funkce 0 a x^2+y^2 tedy dostáváme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0$.

2. METODA Polární souřadnice



Pro popis bodu v $\mathbb{R}^2$ můžeme kromě souřadnic (x,y) využít také vzdálenost od počátku a úhel svíraný s kladnou x-ovou poloosou (r,φ).

Pak $x = r\cos\varphi$ ⌜z definice goniometrických fcí⌟
$y = r\sin\varphi$

a $x^2+y^2 = r^2$ ⌜Pythagorova věta⌟

Navíc $(x,y) \to 0 \iff r \to 0$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^4\varphi + r^4\sin^4\varphi}{r^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)}{r^2} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \underset{\downarrow\atop 0}{r^2} \underbrace{(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)}_{0\le\ \ \le 2} = 0$$ ⌜VO2P nebo "omezená · 0"⌟

⌜Polární souřadnice se hodí na limity u počátku.⌟

3) Spočtěte limitu $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz^2}{x^2+y^2+z^2}$.

Řešení

$D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, $(0,0,0) = \sigma$ je hromadný bod D

Vezměme $x=y=0$ (σ je hromadný bod).

$$\lim_{(x,y,z)\to\sigma} \frac{xyz^2}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{0}{z^2} = 0$$ … podezřelá limita

⌜nyní 0 na VO2P nemůžeme použít přímo, ale použijeme ji pro $|\cdot|$⌟

$$0 \xleftarrow[(x,y,z)\to\sigma]{} 0 \le \left|\frac{xyz^2}{x^2+y^2+z^2}\right| = \frac{|xy|z^2}{x^2+y^2+z^2} \le \frac{|xy|(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2} = |xy| \xrightarrow[(x,y,z)\to\sigma]{} 0$$

Z VO2P (pro 0 a $|xy|$) dostáváme $\lim_{(x,y,z)\to\sigma} \left|\frac{xyz^2}{x^2+y^2+z^2}\right| = 0$.

Nyní $\lim_{(x,y,z)\to\sigma} \left|\frac{xyz^2}{x^2+y^2+z^2} - 0\right| = 0$ a tedy $\lim_{(x,y,z)\to\sigma} \frac{xyz^2}{x^2+y^2+z^2}$.

4) Spočtěte limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

Řešení

$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $(0,0)$ je hromadný bod D.

Použijeme Větu o limitě složené funkce (VOLSF).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 = 0$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{\sqrt{t+1}-1} = \lim_{t\to 0} \frac{t\,(\sqrt{t+1}+1)}{(\sqrt{t+1}-1)(\sqrt{t+1}+1)} = \lim_{t\to 0} \frac{t(\sqrt{t+1}+1)}{t+1-1} = \lim_{t\to 0}(\sqrt{t+1}+1) = 2$$

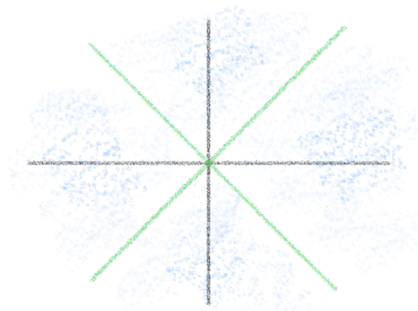
Z VOLSF dostáváme, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = 2$.

5) Rozhodněte, zda je spojitá funkce $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y+xy^2}{x^2-y^2}, & x^2 \neq y^2, \\ 0, & x^2 = y^2. \end{cases}$

Řešení $D = \mathbb{R}^2$.

Strategie: Na množině, kde je známá spojitost elementárních funkcí a operací, pouze okomentujeme. V ostatních bodech ověřujeme, zda se limita rovná funkční hodnotě.

- Na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,\pm x), x\in\mathbb{R}\}$ je funkce spojitá ze spojitosti polynomů a podílu.



- Pro body $\{(x,\pm x), x\in\mathbb{R}\}$ ověříme, zda

$$\lim_{(x,y)\to(c,c)} f(x,y) \boxed{\overset{?}{=}} f(c,c) = 0, \quad \lim_{(x,y)\to(c,-c)} f(x,y) \boxed{\overset{?}{=}} f(c,-c) = 0, \quad c\in\mathbb{R}.$$

(c,c), $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(c,-c)\\ x^2\neq y^2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(c,-c)\\ x^2\neq y^2}} \frac{x^2y+xy^2}{x^2-y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(c,-c)\\ x^2\neq y^2}} \frac{xy(x+y)}{(x+y)(x-y)} = \lim_{\substack{(x,y)\to(c,-c)\\ x^2\neq y^2}} \frac{xy}{x-y} = \frac{-c^2}{2c}$$

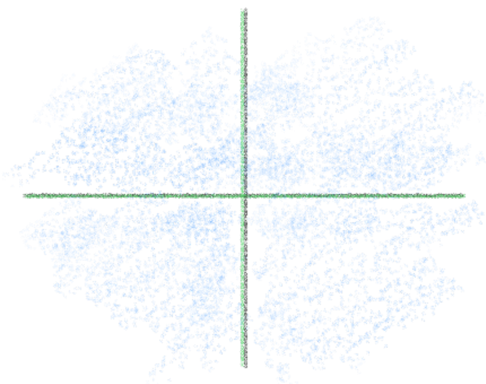
$$= -\frac{c}{2} \neq 0, \quad c\neq 0.$$

Dostáváme, že také $\lim\limits_{(x,y)\to(c,-c)} f(x,y) \neq 0 = f(c,-c)$, $c\neq 0$, a tedy funkce v těchto bodech není spojitá.

6) Rozhodněte, zda je spojitá funkce $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{xy}, & xy\neq 0,\\ 1, & xy=0.\end{cases}$

Řešení

- Na $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\neq 0, y\neq 0\}$ je funkce spojitá ze spojitosti polynomu, sinu složené funkce a podílu.



- Na $\{(0,y), y\in\mathbb{R}\}\cup\{(x,0), x\in\mathbb{R}\}$ zkoumáme limity v bodech.

Využijeme VOLSF.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(c,0)\\(0,c)}} xy = 0$$

Definujeme funkci $S(t)=\begin{cases}\dfrac{\sin t}{t}, & t\neq 0,\\ 1, & t=0.\end{cases}$ Pak $\lim_{t\to 0} S(t)=1$.

Z VOLSF dostáváme: $\lim_{\substack{(x,y)\to(c,0)\\(0,c)}} f(x,y) = 1 = f(c,0), \; c\in\mathbb{R}.$
$= f(0,c)$

Tedy funkce f je spojitá na svém definičním oboru.