

Cvičení 4

Téma: Směrová derivace a parciální derivace

Připomenutí

- směrová derivace funkce f v bodě a podle v

$$\nabla_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0), \text{ kde } \varphi(t) := f(a+tv).$$

- parciální derivace (speciálně pro $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $a = (a_1, a_2)$)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \nabla_{(1,0)} f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1+t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \nabla_{(0,1)} f(a)$$

pro známé funkce obvykle počítáme tak, že derivujeme podle jedné proměnné a ostatní proměnné vystupují jako konstanty

- parciální derivace vyšších řádů čteme zleva: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$

Příklady

- Vypočítejte z definice směrovou derivaci funkce $f(x,y) = \frac{xy}{x+y}$ ve směru $v = (4,1)$ v bodě $a = (2,-1)$.

Řešení

- $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$ má smysl hledat derivaci v a .

- $a+tv = (2+t \cdot 4, -1+t \cdot 1) = (2+4t, -1+t)$.

$$\begin{aligned} \nabla_v f(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(2+4t, -1+t) - f(2, -1)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{(2+4t)(-1+t)}{2+4t-1+t} - \frac{2 \cdot (-1)}{2-1}}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{-2+2t-4t+4t^2}{1+5t} + 2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4t^2 - 2t - 2 + 2 + 10t}{t(1+5t)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(4t+8)}{t(1+5t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{8+4t}{1+5t} \stackrel{AL}{=} 8 \end{aligned}$$

Alternativně: Vezměme $\varphi(t) = f(2+4t, -1+t) = \frac{4t^2 - 2t - 2}{1+5t}$.

$$\varphi'(0) = \left(\frac{4t^2 - 2t - 2}{1 + 5t} \right)'(0) = \frac{(8t - 2) \cdot (1 + 5t) - 5(4t^2 - 2t - 2)}{(1 + 5t)^2} \Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{-2 \cdot 1 - 5(-2)}{1^2} = \frac{8}{1} = 8.$$

• obvykle však počítáme pomocí diferenciálu (Cv.5)

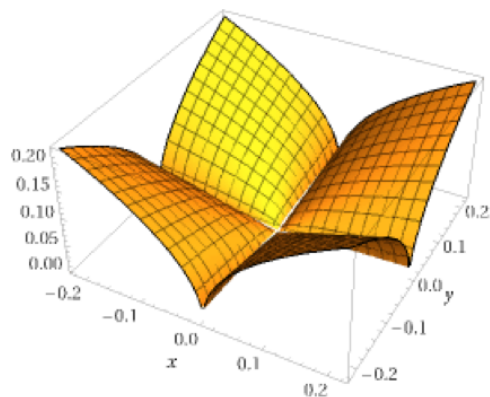
2) At' $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. Nalezněte všechny vektory $v = (v_1, v_2)$ tak, aby existovala $\nabla_v f(0,0)$. Tuto derivaci určete.

Řešení

$$D = \mathbb{R}^2, a = (0,0) \in D, a + tv = (0 + tv_1, 0 + tv_2)$$

$$\nabla_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|tv_1 tv_2|} - \sqrt{|0 \cdot 0|}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|v_1 v_2|} \cdot \sqrt{t^2}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{|v_1 v_2|} \frac{|t|}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{|v_1 v_2|} \cdot \text{sgn}(t) = \begin{cases} v_1 \cdot v_2 \neq 0 : \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{|v_1 v_2|} \cdot \text{sgn}(t) = \sqrt{|v_1 v_2|} \\ \lim_{t \rightarrow 0^-} \sqrt{|v_1 v_2|} \cdot \text{sgn}(t) = -\sqrt{|v_1 v_2|} \end{cases}$$



$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0}$ neexistuje

$\Rightarrow \nabla_v f(0,0)$ neexistuje pro $v \in \{(v_1, v_2), v_1 \neq 0, v_2 \neq 0\}$

$$v_1 \cdot v_2 = 0 : \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{|v_1 v_2|} \cdot \text{sgn}(t) = 0$$

$\Rightarrow \nabla_v f(0,0) = 0$ pro $v \in \{(v_1, v_2), v_1 = 0 \vee v_2 = 0\}$.

3) Nalezněte všechny parciální derivace 1. řádu funkce $f(x,y) = x^2 - 3x^2y + 5y^3$ v bodě $a = (-2, 1)$.

Řešení: Počítáme tak, že ostatní proměnné bereme jako konstanty: $\frac{\partial(5y^3)}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial(x^2 - 3x^2y + 5y^3)}{\partial x}(-2, 1) = 2x - 3y \cdot 2x + 0 \Big|_{(-2, 1)} = -4 - 3 \cdot 1 \cdot 2(-2) = 8$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \frac{\partial(x^2 - 3x^2y + 5y^3)}{\partial y}(-2, 1) = 0 - 3x^2 + 15y^2 \Big|_{(-2, 1)} = -12 + 15 = 3$$

4) Nalezněte všechny parciální derivace 1. řádu funkce

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + z^2 \cos^2 z + 1} \quad \text{všude, kde existují.}$$

Řešení

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 \cos^2 z + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 \cos^2 z + 1}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 \cos^2 z + 1}} \cdot 2y \cos^2 z = \frac{y \cos^2 z}{\sqrt{x^2 + y^2 \cos^2 z + 1}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 \cos^2 z + 1}} \cdot y^2 2 \cos z \cdot (-\sin z) = \frac{-y^2 \sin z \cos z}{\sqrt{x^2 + y^2 \cos^2 z + 1}}$$

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

5) Vypočítejte všechny parciální derivace 1. řádu funkce f a určete všechny body, ve kterých jsou spojité, jestliže

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Řešení

• na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(x^2 + y^2) - xy \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

ze symetrie $f(x, y) = f(y, x)$

jsou spojité
na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
ze spojitosti
polynomů
a podílu.

• pro $(0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + t \cdot 1, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t \cdot 0}{t^2 + 0^2} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0 \text{ ze symetrie}$$

• spojitost v $(0, 0)$?

Overíme, zda $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \stackrel{?}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$.

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} : \quad y = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^4} = 0$$

$$x = 0 \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^3}{y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \text{ neexistuje}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ neexistuje} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \text{ není spojitá v } (0, 0)$$

Pro $\frac{\partial f}{\partial y}$ analogicky.

6) Je dána funkce $f(x,y) = \frac{y}{2x+3y}$. Přímým výpočtem ověřte

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Řešení

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{0 - y \cdot 2}{(2x+3y)^2} = \frac{-2y}{(2x+3y)^2} \quad | \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1 \cdot (2x+3y) - y \cdot 3}{(2x+3y)^2} = \frac{2x}{(2x+3y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{2 \cdot (2x+3y)^2 - 2x \cdot 2 \cdot (2x+3y) \cdot 2}{(2x+3y)^4} = \frac{4x+6y-8x}{(2x+3y)^3} = \frac{-4x+6y}{(2x+3y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{-2 \cdot (2x+3y)^2 + 2y \cdot 2 \cdot (2x+3y) \cdot 3}{(2x+3y)^4} = \frac{-4x-6y+12y}{(2x+3y)^3} = \frac{-4x+6y}{(2x+3y)^3} \quad || \checkmark$$

7) Je dána funkce $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Ukážete, že $\Delta f = 0$ na $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

Řešení

Chce se po nás ověřit, že f je řešením homogenní Laplaceovy rovnice $\Delta f = 0$, kde $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ se nazývá Laplaceův operátor

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2} (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -x \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - x \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \cdot \left(-1 + \frac{3x^2}{x^2+y^2+z^2}\right) \end{aligned}$$

Ze symetrie:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \cdot \left(-1 + \frac{3y^2}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \cdot \left(-1 + \frac{3z^2}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

Pak

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \cdot \left(-3 + \frac{3x^2+3y^2+3z^2}{x^2+y^2+z^2}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \cdot (-3+3) = 0. \end{aligned}$$