

PřipomenutíDiferenciál: lineární zobrazení $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, kde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0.$$

Značíme $df(a)(h) := L(h)$.Pokud existuje, platí $df(a)(h) = \nabla_h f(a) = \nabla f(a) \cdot h$, $m=1$,
 $= J_f(a) \cdot h$, $m \geq 1$,kde $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \right)$ gradient,

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(a) \\ \vdots \\ \nabla f_m(a) \end{pmatrix} \quad \text{Jacobiho matice.}$$

Gradient $\nabla f(a)$ udává směr největšího růstu, $-\nabla f(a)$ udává směr největšího poklesu.Postačující podmínka pro existenci diferenciálu: Jestliže funkce f má na nějakém okolí bodu a spojitě všechny parciální derivace, pak je v bodě a diferencovatelná.Příklady

1) Pomocí diferenciálu vypočítejte směrovou derivaci funkce

$$f(x,y) = \frac{xy}{x+y} \quad \text{ve směru } v = (4,1) \quad \text{v bodě } a = (2,-1).$$

Řešení

$$\bullet D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,-x), x \in \mathbb{R}\}$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(x+y) - xy}{(x+y)^2} = \frac{y^2}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{(x+y)^2} \quad \text{ze symetrie}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{obě parciální derivace jsou} \\ \text{spojité na } D \text{ (podíl polynomů)} \\ \Rightarrow f \text{ je diferencovatelná na } D, \\ \text{a platí } \nabla_v f(a) = \nabla f(a) \cdot v. \end{array} \right\}$$

$$\bullet \nabla f(x,y) = \left(\frac{y^2}{(x+y)^2}, \frac{x^2}{(x+y)^2} \right), \quad \nabla f(2,-1) = \left(\frac{1}{1}, \frac{4}{1} \right) = (1, 4).$$

$$\bullet \nabla_{(4,1)} f(2,-1) = \nabla f(2,-1) \cdot (4,1) = (1,4) \cdot (4,1) = 4+4=8.$$

2) Je dána funkce $f(x,y) = x^2 - 3xy + 4y$. Najděte všechny jednotkové vektory v tak, aby $\nabla_v f(1,1) = -1$.

Řešení

$$\bullet D = \mathbb{R}^2$$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{obě parciální derivace jsou spojité na } \mathbb{R}^2 \\ \Rightarrow f \text{ je diferencovatelná na } \mathbb{R}^2 \text{ a platí} \\ \nabla_v f(a) = \nabla f(a) \cdot v. \end{array}$$

$$\bullet \nabla_v f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot v = (2-3, -3+4) \cdot (v_1, v_2) = -v_1 + v_2$$

$$\bullet \text{Podmínka: } \boxed{\nabla_v f(1,1) = -1}$$

$$-v_1 + v_2 = -1$$

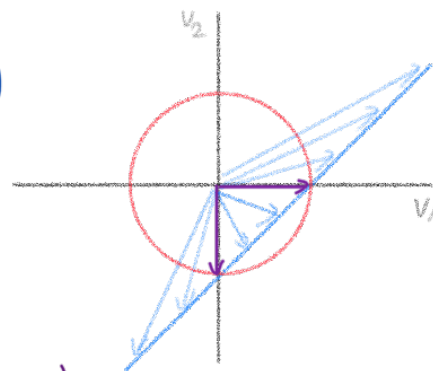
$$v_2 = -1 + v_1 \Rightarrow v = (v_1, -1 + v_1)$$

$$\text{Podmínka: } \boxed{\|v\| = 1}$$

$$\sqrt{v_1^2 + (-1 + v_1)^2} = 1$$

$$v_1^2 + 1 - 2v_1 + v_1^2 = 1$$

$$2v_1(v_1 - 1) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 = 0 \Rightarrow v = (0, -1), \\ v_1 = 1 \Rightarrow v = (1, 0). \end{array} \right.$$



3) Je dána funkce $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$. Najděte jednotkové vektory v_1 a v_2 tak, aby v_1 udával směr největšího růstu a v_2 směr největšího poklesu v bodě $(1,2)$.

Řešení

$$\bullet D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

obě parciální derivace jsou spojité na D
 $\Rightarrow f$ je diferencovatelná na D

- $\nabla f(1,2) = \left(\frac{4-1}{5^2}, \frac{-2 \cdot 2}{5^2} \right) = \left(\frac{3}{25}, \frac{-4}{25} \right)$ udává směr největšího růstu, $-\nabla f(1,2)$ udává směr největšího poklesu.
- $\|\nabla f(1,2)\| = \sqrt{\frac{9}{25^2} + \frac{16}{25^2}} = \sqrt{\frac{25}{25^2}} = \frac{1}{5}$
- chceme: $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$

$$v_1 = \frac{\nabla f(1,2)}{\|\nabla f(1,2)\|} = \frac{\left(\frac{3}{25}, \frac{-4}{25} \right)}{\frac{1}{5}} = 5 \cdot \left(\frac{3}{25}, \frac{-4}{25} \right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5} \right)$$

$$v_2 = \frac{-\nabla f(1,2)}{\|\nabla f(1,2)\|} = \left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

4) Nalezněte Jacobiho matici a diferenciál funkce $f(x,y,z) = (xyz, x^2z)$ v bodě $a = (1, -2, 1)$.

Řešení

- Označme $f_1 = xyz$, $f_2 = x^2z$. $D = \mathbb{R}^3$.
- $$\left. \begin{array}{lll} \frac{\partial f_1}{\partial x} = yz & \frac{\partial f_1}{\partial y} = xz & \frac{\partial f_1}{\partial z} = xy \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} = 2xz & \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 & \frac{\partial f_2}{\partial z} = x^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{všechny parciální derivace} \\ \text{jsou spojité na } \mathbb{R}^3 \\ \Rightarrow f \text{ je diferencovatelná na } \mathbb{R}^3 \\ \text{a platí } df(a)(h) = J_f(a) \cdot h. \end{array}$$
- Jacobiho matice:

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2xz & 0 & x^2 \end{pmatrix} \quad J_f(1, -2, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• Diferenciál:

$$df(1, -2, 1)(h) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2h_1 + h_2 - 2h_3 \\ 2h_1 + h_3 \end{pmatrix}.$$

5) Nalezněte rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 5y$ v bodě $(1, 2, -4)$.

Řešení

Tečná nadrovina: graf funkce $g(x) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x-a)$

- $f(1,2) = 2 + 4 - 10 = -4 \Rightarrow -4$ je funkční hodnota f v bodě $(1,2)$
- $\nabla f(x,y) = (4x, 2y-5)$. Obě parc. derivace spojité $\Rightarrow f$ diferencovatelná.
 $\nabla f(1,2) = (4, -1)$
- Tečná rovina:
$$g(x,y) = f(1,2) + \nabla f(1,2) \cdot ((x,y) - (1,2))$$

$$= -4 + (4, -1) \cdot (x-1, y-2) = -4 + 4x - 4 - y + 2$$

$$= -6 + 4x - y.$$

Alternativní zápis: $z = -6 + 4x - y \Rightarrow \underline{4x - y - z - 6 = 0}.$

6) Pomocí diferenciálu najděte přibližnou hodnotu $1,02^{3,01}$.

Řešení

• Zvolme $f(x, y) = x^y$. $\lceil f(x) \approx f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a)$ pro x blízké a $\rceil$

Pak $f(1,02; 3,01) \approx f(1,3) + \nabla f(1,3) \cdot ((1,02; 3,01) - (1,3))$

$$D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

• $\frac{\partial f}{\partial x} = y x^{y-1}$ $\lceil y$ je konstanta: pro $y \neq 0$ derivujeme jako mocninu, pro $y = 0$ vyjde 0 $\rceil$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial (e^{y \ln x})}{\partial y} = e^{y \ln x} \cdot \ln x = x^y \cdot \ln x \quad \left. \begin{array}{l} \text{obě parciální} \\ \text{derivace spojitě} \\ \Rightarrow f \text{ diferencovatelná} \end{array} \right\}$$

$$\nabla f(x, y) = (y x^{y-1}, x^y \cdot \ln x)$$

$$\begin{aligned} 1,02^{3,01} &\approx 1^3 + (3 \cdot 1^2, 1^3 \cdot \ln 1) \cdot (0,02; 0,01) = 1 + (3, 0) \cdot (0,02; 0,01) \\ &= 1 + 0,06 = \underline{1,06}. \end{aligned}$$

7) Určete $h'(0)$, víte-li:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$g(0) = (1, 3)$$

$$g'(0) = (-2, 2)$$

$$\nabla f(1, 3) = (5, -2)$$

$$h(t) = f(g(t)).$$

Řešení: Označme složky funkce $g = (g_1, g_2)$.

Pak z řetězového pravidla

$$h'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(0)) \cdot g_1'(0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(g(0)) \cdot g_2'(0).$$

$\hookrightarrow$ musejí se shodovat

$$= 5 \cdot (-2) + (-2) \cdot 2 = -14$$

8) Určete $\frac{\partial h}{\partial u}(0,0)$ a $\frac{\partial h}{\partial v}(0,0)$, víte-li $g(u, v) = (e^u + \sin v, e^u + \cos v)$,

$$\nabla f(1, 2) = (2, -3) \text{ a } h(u, v) = f(g(u, v)).$$

Řešení

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

$$g(0,0) = (1+0, 1+1) = (1, 2) \rightarrow \nabla f \text{ je zadán ve správném bodě.}$$

$$\text{Označme } g_1(u, v) = e^u + \sin v, g_2(u, v) = e^u + \cos v.$$

Dak z řetězkového pravidla:

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial u}$$

$$\frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial v}$$

vhodné vypsati,
abychom zjistili,
co vlastně
potřebujeme

Chybí nám tedy informace

$$\frac{\partial g_1}{\partial u}(0|0) = e^u \Big|_{(0|0)} = 1$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial u}(0|0) = e^u \Big|_{(0|0)} = 1$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial v}(0|0) = \cos v \Big|_{(0|0)} = 1$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial v}(0|0) = -\sin v \Big|_{(0|0)} = 0.$$

Maíme tedy

$$\frac{\partial h}{\partial u}(0|0) = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 = -1,$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(0|0) = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 = 2.$$

(další cvičení)

a) Pomocí věty o složeném zobrazení najděte $g'(t)$,
jestliže $g(t) = f(e^t, e^{-t})$, kde $f(x, y) = \frac{x-y}{x+2y}$.

Řešení:

$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-2y, y) | y \in \mathbb{R}\}$ a platí $e^t > 0, e^{-t} > 0$, tudíž
 $\forall t \in \mathbb{R}: (e^t, e^{-t}) \in D_f$.

Označme $h(t) = (e^t, e^{-t})$.

Z řetězkového pravidla

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(h(t)) \cdot h_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(h(t)) \cdot h_2'(t)$$

Tedy potřebujeme $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x+2y-(x-y)}{(x+2y)^2} = \frac{3y}{(x+2y)^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-(x+2y)-(x-y) \cdot 2}{(x+2y)^2} = \frac{-3x}{(x+2y)^2}$$

$$h_1'(t) = e^t, \quad h_2'(t) = -e^{-t}.$$

Dosadíme

$$g'(t) = \frac{3e^{-t}}{(e^t+2e^{-t})^2} \cdot e^t + \frac{-3e^t}{(e^t+2e^{-t})^2} \cdot (-e^{-t}) = \frac{3e^{-t+t} + 3e^{t-t}}{(e^t+2e^{-t})^2}$$

$$= \frac{6}{(e^t+2e^{-t})^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$