

Cvičení 6

Téma: Funkce třídy C^k
Taylorův polynom

1) Nalezněte Taylorův rozvoj 2. řádu funkce $f(x,y) = x^2 + xy - y$ v bodě $a = (1,2)$.

Řešení

$$T_2(x,y) = f(1,2) + \nabla f(1,2) \cdot ((x,y) - (1,2)) + \frac{1}{2} ((x,y) - (1,2)) H_f(a) ((x,y) - (1,2))$$

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix} \begin{matrix} \nwarrow \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla f \\ \nearrow \frac{\partial}{\partial x_n} \nabla f \end{matrix}$$

se nazývá Hessova matice
(pro $f \in C^2$: symetrická)

$$\text{a platí } T_2(x) = \underbrace{f(a) + \nabla f(a) \cdot (x-a)}_{T_0(x)} + \frac{1}{2} (x-a) H_f(a) (x-a)$$

$T_1(x)$ (viz CV5, tečná nadrovina)

Tedy potřebujeme

$$f(1,2) = 1 + 2 - 2 = 1$$

$$\nabla f(x,y) = (2x+y, x-1), \quad \nabla f(1,2) = (4, 0)$$

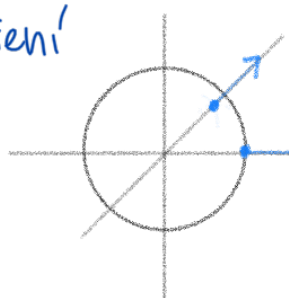
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_f(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= 1 + (4,0) \cdot (x-1, y-2) + \frac{1}{2} (x-1, y-2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = \\ &= 1 + 4x - 4 + \frac{1}{2} (x-1, y-2) \begin{pmatrix} 2x-2+y-2 \\ x-1 \end{pmatrix} = \\ &= 4x-3 + \frac{1}{2} (2x^2 - 2x + xy - 2x - 2x + 2 - y + 2 + xy - y - 2x + 2) = \\ &= 4x-3 + x^2 - x + \frac{xy}{2} - x - x + 1 - \frac{y}{2} + 1 + \frac{xy}{2} - \frac{y}{2} - x + 1 = \\ &= \underline{x^2 + xy - y}. \end{aligned}$$

Pozorování: $T_2(x,y) = f(x,y) \dots$ neboť $f(x,y)$ je polynom stupně 2, jeho Taylorův polynom řádu 2 je "nejbližší" polynom stupně 2 $\Rightarrow$ je to ten samý.

2) Nalezněte jednotkový normálový vektor k ploše $x^2+y^2+z^2=1$ v bodech $(1,0,0)$ a $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Řešení



Zadaná plocha: jednotková sféra

Vezměme $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. Pak $\text{lev}(f,1)$ je $\left. \begin{array}{l} f \in C^1 \Rightarrow \nabla f(a) \text{ je kolmý na } \text{lev}(f, f(a)) \end{array} \right\} f \in C^1$

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z) = 2 \cdot (x,y,z)$$

$$\nabla f(1,0,0) = (2,0,0), \quad \frac{(2,0,0)}{\|(2,0,0)\|} = (1,0,0)$$

$$\nabla f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}, 1, 1\right), \quad \frac{(\frac{2}{\sqrt{2}}, 1, 1)}{\|(\frac{2}{\sqrt{2}}, 1, 1)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Pozorování: obdrželi jsme zadané body: byly ve správném směru a jednotkové. To platí pro libovolný bod sféry $S(0,1)$.

3) Nalezněte rovnici tečné roviny k ploše $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0$ v bodě $(4,3,4)$.

Řešení

Bod $(4,3,4)$ je bodem zadané plochy.

Vezměme $f(x,y,z) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8}$. Pak $\text{lev}(f,0)$ je zadaná plocha.

$f \in C^1 \Rightarrow \nabla f(4,3,4)$ je kolmý na $\text{lev}(f,0)$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{2x}{16}, \frac{2y}{9}, -\frac{2z}{8}\right), \quad \nabla f(4,3,4) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -1\right)$$

1. METODA: ze vzorce $\nabla f(a) \cdot (x-a) = 0$

$$\nabla f(4,3,4) \cdot ((x,y,z) - (4,3,4)) = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -1\right) \cdot (x-4, y-3, z-4) = 0$$

$$\frac{x}{2} - 2 + \frac{2}{3}y - 2 - z + 4 = 0$$

$$\underline{\underline{\frac{x}{2} + \frac{2}{3}y - z = 0.}}$$

2. METODA: $ax+by+cz+d=0$, $n=(a,b,c)$

$\nabla f(4,3,4)$ je normálový vektor tečné roviny $\Rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y - z + d = 0$

$\left[\text{vlastně } \nabla f(a) \cdot x + d = 0 \right]$

Dosadíme bod $(4,3,4)$, kterým rovina prochází:

$$\frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot 3 - 4 + d = 0$$

$$d = -2 - 2 + 4 = 0$$

$\left[\text{vlastně } \nabla f(a) \cdot a + d = 0 \right]$

$d = -\nabla f(a) \cdot a$
 $\Rightarrow$ vzorec z 1. metody? $\left. \right]$

$$\text{Tedy } \underline{\underline{\frac{x}{2} + \frac{2}{3}y - z = 0.}}$$

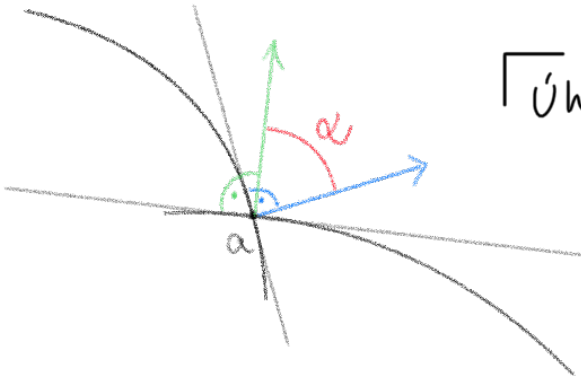
4) Nalezněte úhel sevřený plochami $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$
 v bodě $a = (0, -1, 0)$. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 3 = 0$

Řešení

Bod a je bodem obou ploch.

Vezměme $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2$, $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 3$.

Pak $\text{lev}(f, 1)$ a $\text{lev}(f, 0)$ jsou zadané plochy, $f, g \in C^1$.



Úhel sevřený plochami
 $\longleftrightarrow$ úhel sevřený nadrovinami
 $\longleftrightarrow$ ostrý úhel sevřený normálovými
 vektory nadrovin.

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= (4x, 2y, 2z), \quad \nabla f(0, -1, 0) = (0, -2, 0) \\ \nabla g(x, y, z) &= (2x - 2, 2y + 4, 2z), \quad \nabla g(0, -1, 0) = (-2, 2, 0) \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{normálové vektory} \\ \text{změříme úhel} \\ \text{mezi nimi} \end{array} \right\}$$

$$\cos \alpha = \frac{|(0, -2, 0) \cdot (-2, 2, 0)|}{\|(0, -2, 0)\| \cdot \|(-2, 2, 0)\|} = \frac{|-4|}{2 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

5) Nalezněte všechny body na elipsoidu $3x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$,
 ve kterých je tečná rovina rovnoběžná s rovinou
 $-12x + 2y + 6z = 0$.

Řešení

• Zadaná rovina má normálový vektor $(-12, 2, 6)$.

Pak všechny rovnoběžné roviny mají $n = c \cdot (-12, 2, 6)$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

• Vezměme $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 3z^2$.

Pak $\text{lev}(f, 1)$ je zadaný elipsoid, $f \in C^1$.

Normálový vektor tečné roviny elipsoidu v obecném bodě
 je $\nabla f(x, y, z) = (6x, 2y, 6z)$.

• Chceme $(6x, 2y, 6z) = c \cdot (-12, 2, 6)$

Tedy $\left. \begin{array}{l} x = -2c \\ y = c \\ z = c \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Pro takové body bude tečná rovina} \\ \text{rovnoběžná se zadanou rovinou.} \\ \text{Existují takové body na elipsoidu?} \end{array}$

Dosadíme $3(-2c)^2 + c^2 + 3 \cdot c^2 = 1.$

$$14c^2 + c^2 + 3c^2 = 1$$

$$16c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm \frac{1}{4}.$$

Závěr: V bodech $(-2 \cdot \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ a $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$
je tečnou rovina elipsoidu rovnoběžná s $-12x + 2y + 6z = 0$.