# Cvičení 7

Téma: Volné extrémy, Konvexita, metoda nejmenších čtverců

1) Klasifikujte stacionární body funkce $f(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^3 - 3y$.

Řešení

⌈ $f \in C^1$, $a$ je stacionární bod pokud $\nabla f(a) = 0$ ⌋

$\nabla f(x,y) = (4x^3 - 4x,\ 3y^2 - 3)$.

Chceme $\nabla f = (0,0)$:

$$4x^3 - 4x = 0 \quad \& \quad 3y^2 - 3 = 0$$

$$4x(x^2-1) = 0 \qquad 3(y^2-1) = 0$$

$$x = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ -1 \end{cases} \qquad y = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

Stacionární body: $(0,1), (1,1), (-1,1)$, $(0,-1), (1,-1), (-1,-1)$.

⌈ Klasifikujte ~ určete lokální maximum / lokální minimum / sedlový bod.

$H_f$ pozitivně definitní $\Leftrightarrow$ lokální minimum

negativně definitní $\Leftrightarrow$ lokální maximum

indefinitní $\Leftrightarrow$ sedlový bod. ⌋

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

$H_f(0,1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ indefinitní (vlastní čísla $-4$ a $6$ → různá znaménka)

$H_f(0,-1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ negativně definitní (záporná vl. č.)

$H_f(1,1) = H_f(-1,1) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ pozitivně definitní (kladná vl. č.)

$H_f(1,-1) = H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ indefinitní

Závěr:

lokální maximum $(0,-1)$

lokální minima $(1,1), (-1,1)$

sedlové body $(0,1), (1,-1), (-1,-1)$

2) Klasifikujte stacionární body funkce $f(x,y) = 1-\sqrt{x^2+y^2}$.

Řešení

$D_f = \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \ (x,y) \neq (0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{t^2+0^2}-1+\sqrt{0^2}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{-|t|}{t} \quad \text{neexistuje}$$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ neexistuje

$\nabla f(x,y)$ existuje na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ a je nenulový

$\Rightarrow$ stacionární body neexistují

(Nicméně, $f$ má v $(0,0)$ lokální maximum: $1-\sqrt{0^2+0^2} \geq 1-\sqrt{x^2+y^2}$.)

(případně polární souřadnice)

3) Klasifikujte stacionární body funkce $f(x,y) = x^4 - 2xy + y^2$.

Řešení

$\nabla f(x,y) = (4x^3 - 2y, -2x+2y)$.

Chceme $\nabla f = 0$:

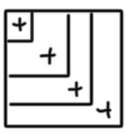
$$\begin{aligned} 4x^3 - 2y &= 0 \\ -2x + 2y &= 0 \Rightarrow x = y \\ \hline 4x^3 - 2x &= 0 \\ 2x(2x^2-1) &= 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \end{aligned}$$

Stacionární body: $(0,0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Sylvestrovo kritérium: znaménka subdeterminantů

např.:



pozitivně definitní

negativně definitní

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$H_f(0,0)_{\{1\}} = 0$

$H_f(0,0)_{\{1,2\}} = 0 - 4 = \boxed{-4}$

Sylvestrovo kritérium $\Rightarrow$ indefinitní

$$H_f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$H_f(\ \ )_{\{1\}} = 6$

$H_f(\ \ )_{\{1,2\}} = 12 - 4 = 8$

Sylvestrovo kritérium $\Rightarrow$ pozitivně definitní

Závěr:

lokální minima: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Sedlový bod: $(0,0)$

4) Určete, zda je konvexní funkce $f(x,y,z)=x^2+\frac{1}{2}y^2+z^2+xy+yz$.

Řešení

⌜ $f \in C^2(\Omega)$ je konvexní na konvexní otevřené $\Omega$ $\overset{\text{Věta}}{\Longleftrightarrow}$ slide 16

$\forall x \in \Omega$: $H_f(x)$ je pozitivně semidefinitní ⌟

$\nabla f(x,y,z) = (2x+y,\ y+x+z,\ 2z+y)$

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$H_{f\{1\}} = 2$

$H_{f\{1,2\}} = 2-1 = 1$

$H_{f\{1,2,3\}} = 4-2-2 = 0$

nemáme p.d. musíme pokračovat s dalšími subdeterminanty

$H_{f\{1,3\}} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$

$H_{f\{2,3\}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1 = 1$

$H_{f\{2\}} = 1$

$H_{f\{3\}} = 2$

$\Rightarrow$ všechny subdeterminanty jsou nezáporné

$\Rightarrow \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $H_f(x,y,z)$ je pozitivně semidefinitní

$\Rightarrow f$ je na $\mathbb{R}^3$ konvexní.

5) Je dána funkce $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + y^2 - x$.

a) Naleznětě největší otevřenou množinu $C$, na které je $f$ konvexní.

b) Klasifikujte stacionární body funkce $f$.

c) Je bod $(1,0)$ globálním extrémem funkce $f$ na množině $C$?

Řešení

$\nabla f(x,y) = (x^2-1,\ 2y)$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla: $2, 2x$, $x \in \mathbb{R}$

a) $H_f(x,y)$ je pozitivně semidefinitní na $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0\}$

Největší otevřená podmnožina je $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\}$.

b) Chceme $\nabla f(x,y) = o$: $x^2-1=0$ & $2y=0$

$x = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$ $\qquad y = 0$

Stacionární body: $(-1,0), (1,0)$

$H_f(-1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ indefinitní $\Rightarrow (-1,0)$ sedlový bod

$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ pozitivně definitní $\Rightarrow$ $(1,0)$ lokální minimum

c) Bod $(1,0)$ je lokální minimum funkce $f$, která je konvexní na otevřené konvexní množině $C$
věta (slide 16) $\Rightarrow$ $(1,0)$ je (globální) minimum $f$ na $C$.

6) Metodou nejmenších čtverců proložte body $(-1,0), (-\frac{1}{2},3), (0,2), (\frac{1}{2},1)$ funkcí

a) $f(x,y) = ax+b$ ; $a,b \in \mathbb{R}$

b) $f(x,y) = a\sin(\pi x) + b\cos(\pi x)$ ; $a,b \in \mathbb{R}$.

Řešení

Bod $a$ je bod minima funkce $\|Ax-b\|^2 \Leftrightarrow a$ řeší soustavu $A^T \cdot Ax = A^T \cdot b$. (věta na slidu 18)

a) Rádi bychom měli

$$\left.\begin{aligned} a\cdot(-1)+b&=0\\ a\cdot(-\tfrac{1}{2})+b&=3\\ a\cdot 0 \quad +b&=2\\ a\cdot\tfrac{1}{2} \quad +b&=1 \end{aligned}\right\}$$ zapsáno maticově: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soustava 4 rovnic o 2 neznámých, která nemá řešení.

Označme $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pak $\mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{A}^T\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$,

$\mathbb{A}^T\mathbb{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Řešíme soustavu $\mathbb{A}^T\mathbb{A}\binom{a}{b} = \mathbb{A}^T\mathbb{b}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{2} & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 6 \\ \frac{3}{2} & -1 & -1 \end{array}\right) \overset{\frac{3}{2}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 8 \end{array}\right)$$

$5b = 8 \Rightarrow b = \frac{8}{5}$
$\Rightarrow -a + 4\cdot\frac{8}{5} = 6$
$\Rightarrow a = \frac{2}{5}$

Závěr: hledaná funkce má předpis $f(x,y) = \frac{2}{5}x + \frac{8}{5}$.

b) Rádi bychom měli

$$\left.\begin{aligned} 0 &= a\cdot\sin(\pi(-1)) + b\cos(\pi(-1)) = 0 - b \\ 3 &= a\cdot\sin(\pi(-\tfrac{1}{2})) + b\cos(\pi(-\tfrac{1}{2})) = -a \\ 2 &= a\cdot\sin(\pi\cdot 0) + b\cos(\pi(0)) = b \\ 1 &= a\cdot\sin(\pi\tfrac{1}{2}) + b\cos(\pi(\tfrac{1}{2})) = a \end{aligned}\right\}$$

V matici:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Označme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbb{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.\ \text{Pak}\quad \mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a

$$\mathbb{A}^T\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\quad \mathbb{A}^T\mathbb{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Řešíme soustavu $\mathbb{A}^T\mathbb{A}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathbb{A}^T\mathbb{b}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pak $a=-1$, $b=1$ a hledaná funkce je $f(x,y) = -\sin(\pi x) + \cos(\pi x)$.