Cvičení 8 Téma: Vázané extrémy

1) Naleznëte všechny body v rovině $x+y+z=1$, které jsou nejblíže bodu $(2,0,-3)$.

Řešení

Úloha na metodu Lagrangeových multiplikátorů, musíme nalézt množinu M a funkci f.

Vezměme $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x+y+z=1}_{\text{vazební podmínka}}\}$

a

$f(x,y,z) = \|(x,y,z)-(2,0,-3)\|^2$ (chceme minimizovat $\| \ \|$, ale bod minima bude pro funkci $\| \ \|^2$ stejný)

$= (x-2)^2 + y^2 + (z+3)^2.$

Označme $g(x,y,z) = x+y+z-1.$

Podle metody Lagrangeových multiplikátorů pak pro extrém platí buď

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \nabla g(x,y,z) = 0 \\ 2) & \nabla f(x,y,z) + \lambda \nabla g(x,y,z) = \sigma \end{array}\right\} \text{na } M!$$

1) $\nabla g(x,y,z) = (1,1,1) \neq \sigma$ (na M) $\Rightarrow$ z první podmínky nic nedostáváme

2) $\nabla f(x,y,z) = (2(x-2), 2y, 2(z+3)) = (2x-4, 2y, 2z+6).$

Řešíme soustavu

$$\begin{array}{ll} 2x-4+\lambda\cdot 1 = 0 & (\mathrm{I}) \\ 2y+\lambda\cdot 1 = 0 & (\mathrm{II}) \\ 2z+6+\lambda\cdot 1 = 0 & (\mathrm{III}) \\ x+y+z = 1. & (\mathrm{IV}) \end{array}$$

$(\mathrm{I}) \Rightarrow x = \frac{4-\lambda}{2}$, $(\mathrm{II}) \Rightarrow y = \frac{-\lambda}{2}$, $(\mathrm{III}) \Rightarrow z = \frac{-6-\lambda}{2}$

(IV): $\frac{4-\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} + \frac{-6-\lambda}{2} = 1$

$4-\lambda-\lambda-6-\lambda = 2$

$-4 = 3\lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{4}{3}, x = \frac{16}{6}, y = \frac{4}{6}, z = -\frac{14}{6}$

Vychází nám jeden bod: $(x,y,z) = \left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-7}{3}\right).$

Víme, že minimum existuje (nějaký bod roviny musí být nejblíž).

Všechny body extrému musí splňovat Lagrangeovu větu
$\Rightarrow$ je právě jeden a je to $\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-7}{3}\right)$.

Závěr: Nejbližším bodem na ploše $x+y+z=1$ bodu $(2,0,-3)$ je bod $\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{3}\right)$.

Poznámka: metoda nám vydá všechny body podezřelé z extrému, mezi nimi pak už snadno vybereme (např. dosazením). NUTNÉ však je projít všechny možnosti a osvojit si taktiku.

2) Nalezněte body minima a maxima funkce $f(x,y) = 2x^3 + y^4$ na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leq 1\}$.

Řešení

- Množina M je uzavřená a omezená, funkce f je spojitá na $M \Rightarrow f$ nabývá na M svého maxima a minima.
- Řešíme zvlášť extrémy na $\operatorname{Int}(M) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 < 1\}$ a $\partial M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 = 1\}$.

<u>vnitřek</u> (zkoumáme lokální extrémy)

$\nabla f(x,y) = (6x^2, 4y^3)$

stacionární bod: $(0,0) \in \operatorname{Int} M$ - bod podezřelý z extrému

<u>hranice</u>

Na Lagrangeovy multiplikátory potřebujeme vazebnou funkci $g(x,y) = x^2+y^2-1$, $\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$.

1) Body kde $\nabla g(x,y) = o$:

$$\left.\begin{aligned} 2x &= 0 \\ 2y &= 0 \end{aligned}\right\} (x,y) = (0,0) \notin \partial M$$

2) Body kde $\nabla f + \lambda \nabla g = o$:

Řešíme soustavu
$$\begin{aligned} 6x^2 + \lambda 2x &= 0 && (I) \\ 4y^3 + \lambda 2y &= 0 && (II) \\ x^2+y^2 &= 1 && (III) \end{aligned}$$

$$(\mathrm{I})\quad 2x(3x+\lambda)=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{x=0} \overset{(\mathrm{III})}{\Rightarrow} y^2=1 \Rightarrow \underline{y=\pm 1} \\ x=-\frac{\lambda}{3} \quad (*) \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\quad 2y(2y^2+\lambda)=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{y=0} \overset{(\mathrm{III})}{\Rightarrow} x^2=1 \Rightarrow \underline{x=\pm 1} \\ y^2=-\frac{\lambda}{2} \quad (**) \end{cases}$$

$(*)\,\&\,(**)\,\&\,(\mathrm{III})$: $\left(-\frac{\lambda}{3}\right)^2 + -\frac{\lambda}{2} = 1$

$$\frac{\lambda^2}{9} - \frac{\lambda}{2} = 1 \quad |\cdot 18$$

$$2\lambda^2 - 9\lambda - 18 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81+8\cdot 18}}{4} = \frac{9 \pm 15}{4} = \begin{cases} -\frac{3}{2} \\ 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{x=\frac{1}{2}},\ y^2=\frac{3}{4} \Rightarrow \underline{y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ x=2,\ y^2=-3 \quad \times \end{cases}$$

Podezřelé body ze všech částí: $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$
$(1,0)$, $(-1,0)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

Porovnáme hodnoty $f(x,y)=2x^3+y^4$:

$f(0,0)=0$, $f(0,1)=f(0,-1)=1$, $f(1,0)=\boxed{2}$, $f(-1,0)=\boxed{-2}$

$f\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{9}{16}=\frac{13}{16}<1$

Závěr: funkce f nabývá na M maxima 2 v bodě $(1,0)$ a minima -2 v bodě $(-1,0)$.

3) Nalezněte nejvyšší bod na křivce, která je průnikem ploch o rovnicích $x^2+y^2=z^2$ a $x+2z=4$.

Řešení

Nalezneme ingredience pro větu o Lagrangeových multiplikátorech.

$f(x,y,z)=z$ (nejvyšší ~ největší z-ová složka)

$M(x,y,z)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x^2+y^2=z^2,\ x+2z=4\}$.

Množina M je uzavřená a omezená, funkce f je spojitá na $M \Rightarrow f$ nabývá na M svého maxima a minima.

Položme $g_1(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$, $g_2(x,y,z) = x+2z-4$.

$\nabla f(x,y,z) = (0,0,1)$, $\nabla g_1(x,y,z) = (2x, 2y, -2z)$, $\nabla g_2(x,y,z) = (1,0,2)$

1) Body, kde $\nabla g_1, \nabla g_2$ jsou lineárně závislé

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} \overset{(-2x)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2y & 2z-4x \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} 2y = 0 &\Rightarrow y = 0 \\ 2z-4x=0 &\Rightarrow z = 2x \end{aligned}$$

M: $x^2+0^2 = 4x^2 \Rightarrow x = 0$

$0+2\cdot 0 = 4$ ✗ nedostáváme žádné body podezřelé z extrému

2) Body, kde platí $\nabla f + \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 = o$

Řešíme soustavu

$$\begin{aligned} 0 + \lambda_1 2x + \lambda_2 \cdot 1 &= 0 && (\mathrm{I}) \\ 0 + \lambda_1 2y + \lambda_2 \cdot 0 &= 0 && (\mathrm{II}) \\ 1 - \lambda_1 2z + \lambda_2 \cdot 2 &= 0 && (\mathrm{III}) \\ x^2 + y^2 - z^2 &= 0 && (\mathrm{IV}) \\ x + 2z - 4 &= 0 && (\mathrm{V}) \end{aligned}$$

(II) $\lambda_1 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \ (*) \\ \lambda_1 = 0 \overset{(\mathrm{I})}{\Rightarrow} \lambda_2 = 0 \overset{(\mathrm{III})}{\Rightarrow} 1 = 0 \ ✗ \end{cases}$

$(*)$ & (IV) & (V):

$$x^2 - z^2 = 0$$

$$\underline{x + 2z - 4 = 0} \Rightarrow x = 4-2z$$

$$(4-2z)^2 - z^2 = 0$$

$$16 - 16z + 4z^2 - z^2 = 0$$

$$16 - 16z + 3z^2 = 0$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{16\cdot 16 - 12\cdot 16}}{6} = \frac{16 \pm 4\cdot 2}{6} = \begin{cases} \underline{\frac{4}{3}} \Rightarrow \underline{x = \frac{4}{3}} \\ \underline{4} \Rightarrow \underline{x = -4} \end{cases}$$

Body podezřelé z extrému: $\left(\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3}\right)$, $(-4, 0, 4)$

Závěr: Porovnáním souřadnice z získáváme, že nejvyšší bod je $(-4, 0, 4)$.

4) Nalezněte tři nezáporná čísla, jejichž součet je 300 a jejichž součin je maximální.

Řešení

Položme $M=\{(x,y,z)\in(\mathbb{R}_0^+)^3,\ x+y+z=300\}$,

$f(x,y,z)=xyz$.

Množina M je uzavřená a omezená, f spojitá $\Rightarrow \exists$ extrémy.

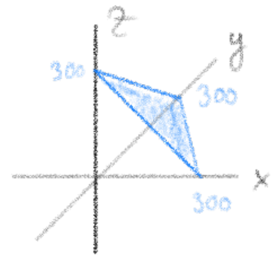
Hledáme maximum f na M. Máme 2 možnosti:

Maximum (maxim) se nabývá na

$M_0 = M \cap \{x=0 \vee y=0 \vee z=0\}$

nebo

$M_+ = M \cap (\mathbb{R}^+)^3$.



na M_0: $f(x,y,z)=0$ — hodnotu porovnáme s hodnotami f na M_+

na M_+: Použijeme metodu L. multiplikátorů.

Položme $\Omega=(\mathbb{R}^+)^3$, Ω otevřená, $g(x,y,z)=x+y+z-300$,

$\nabla g(x,y,z)=(1,1,1)$, $\nabla f(x,y,z)=(yz,xz,xy)$.

1) Body, kde $\nabla g(x,y,z)=0$: žádné

2) Body, kde $\nabla f(x,y,z)+\lambda\nabla g(x,y,z)=0$:

Řešíme soustavu:

$$\begin{aligned} yz+\lambda&=0 && (I)\\ xz+\lambda&=0 && (II)\\ xy+\lambda&=0 && (III)\\ x+y+z&=300 && (IV)\end{aligned}$$

$$x>0 \;\left.\begin{aligned}&\overset{(II)}{\Rightarrow}\; z=-\frac{\lambda}{x}\\ &\overset{(III)}{\Rightarrow}\; y=-\frac{\lambda}{x}\end{aligned}\right\} \overset{(I)}{\Rightarrow} \frac{\lambda^2}{x^2}+\lambda=0 \left\{\begin{aligned}&\lambda=0 \Rightarrow y=z=0\notin\mathbb{R}^+ \quad \times\\ &\frac{\lambda}{x^2}+1=0 \Rightarrow x^2=-\lambda \Rightarrow \lambda\le 0\\ &\qquad x=\pm\sqrt{-\lambda}\end{aligned}\right.$$

- $x=\sqrt{-\lambda}$, $y=-\frac{\lambda}{\sqrt{-\lambda}}=\sqrt{-\lambda}=z \overset{(IV)}{\Rightarrow} \sqrt{-\lambda}+\sqrt{-\lambda}+\sqrt{-\lambda}=300$

$$\begin{aligned}\sqrt{-\lambda}&=100\\ -\lambda&=10000\\ \lambda&=10000 \Rightarrow (100,100,100)\end{aligned}$$

- $x=-\sqrt{-\lambda}\notin\mathbb{R}^+$ $\times$

Bod podezřelý z extrému na M_+: $(100,100,100)$

$f(100,100,100)=1000000>0$ hodnota f na M_0

Závěr: Maximálního součinu 3 kladných čísel se součtem 300 dosáhneme v bodě $(100,100,100)$.