

Cvičení 9

Téma: Lebesgueův integrál:

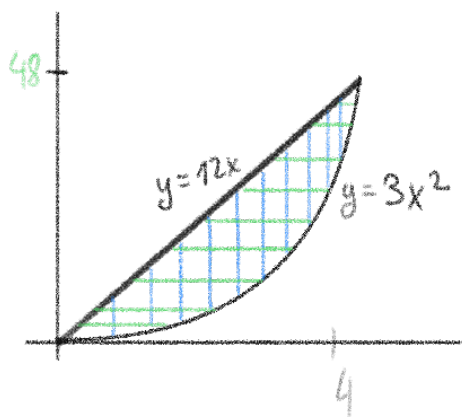
zaměna souřadnic, substituce

1) Zaměňte pořadí integrace v integrálu $\int_0^4 \int_{3x^2}^{12x} f(x,y) dy dx$.

Řešení

Pochopíme, přes jakou množinu a jakým směrem se integruje:

[x probíhá $(0, 4)$, pro dané x y probíhá $(3x^2, 12x)$]



$$12x = 3x^2$$

$$3x(4-x)=0 \Rightarrow \text{křivky se protínají v } 0 \text{ a } 4$$

$$\text{křivky závislé na } y: x = \frac{y}{12}$$

$$x^2 = \frac{y}{3} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{y}{3}}, x > 0.$$

$$\text{pro } x=4: y = 12 \cdot 4 = 48$$

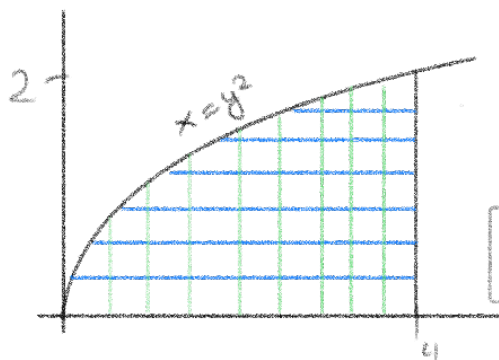
[y probíhá $(0, 48)$, pro dané y x probíhá $(\frac{y}{12}, \sqrt{\frac{y}{3}})$]

$$\int_0^4 \int_{3x^2}^{12x} f(x,y) dy dx = \int_0^{48} \int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x,y) dx dy$$

2) Zaměnou pořadí integrace vypočítejte $\int_0^2 \int_{y^2}^4 \cos \sqrt{x^3} dx dy$.

Řešení

[y probíhá $(0, 2)$, pro dané y x probíhá $(y^2, 4)$]



$$x = 2^2 = 4 \Rightarrow x = 4 \text{ a } x = y^2 \text{ se protínají v } y=2$$

$$x = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{x}, x > 0$$

[x probíhá $(0, 4)$, pro dané x y probíhá $(0, \sqrt{x})$]

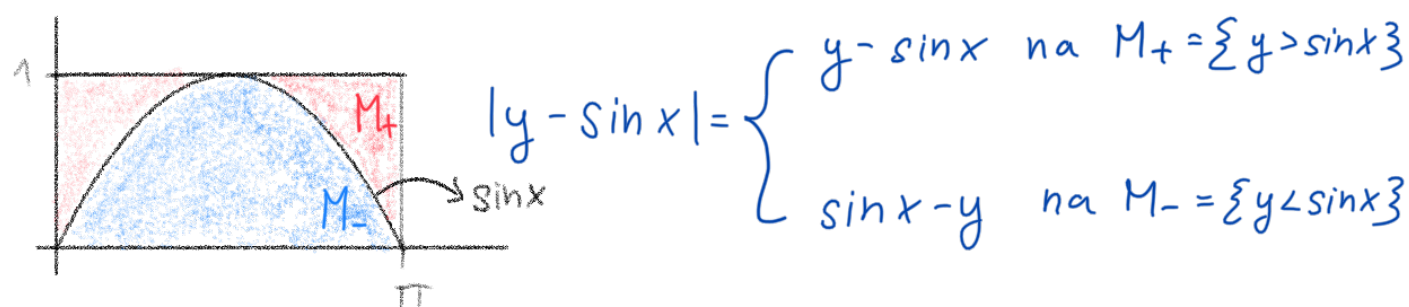
$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_{y^2}^4 \cos \sqrt{x^3} dx dy &= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} \cos \sqrt{x^3} dy dx = \int_0^4 \cos \sqrt{x^3} \left(\int_0^{\sqrt{x}} 1 dy \right) dx = \\ &= \int_0^4 \cos \sqrt{x^3} \cdot \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} \sin \sqrt{x^3} \right]_0^4 = \frac{2}{3} \sin(8). \end{aligned}$$

$$(\sin \sqrt{x^3})' = \cos \sqrt{x^3} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{x} \Rightarrow \int \cos \sqrt{x^3} \cdot \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \sin \sqrt{x^3} + C$$

3) Vypočítejte $\int_M |y - \sin x| d\lambda^2$, kde $M = [0, \pi] \times [0, 1]$.

Řešení

Množina M : rozdělíme na 2 části podle tvaru funkce



«dělá křivka: $y - \sin x < 0$
 $y < \sin x$ »

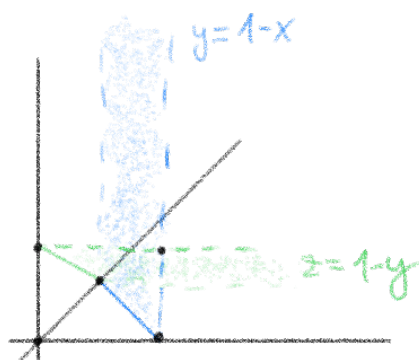
«hodí se integrovat po souřadných úsecích: $dy dx$ »

$$\begin{aligned} \int_M |y - \sin x| d\lambda^2 &= \int_{M_+} (y - \sin x) d\lambda^2 + \int_{M_-} (\sin x - y) d\lambda^2 \\ &= \int_0^\pi \int_{\sin x}^1 (y - \sin x) dy dx + \int_0^\pi \int_0^{\sin x} (\sin x - y) dy dx = \\ &= \int_0^\pi \left[\frac{y^2}{2} - y \sin x \right]_{\sin x}^1 dx + \int_0^\pi \left[y \sin x - \frac{y^2}{2} \right]_0^{\sin x} dx = \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} - \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + \sin^2 x \right) dx + \int_0^\pi \left(\sin^2 x - \frac{\sin^2 x}{2} \right) dx = \\ &= \int_0^\pi \left(\sin^2 x - \sin x + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^\pi + \frac{\pi}{2} = \pi - 1 - 1 = \underline{\underline{\pi - 2}}. \end{aligned}$$

4) Vypočítejte $\int_M y d\lambda^3$, kde M je podmnožina 1. kvadrantu

ohraničená rovnicemi $x + y = 1$, $y + z = 1$.

Řešení



Zvolíme pořadí integrace: nejprve pokryjeme "podlahu", potom projdeme od "podlahy" po "stěnu".

[x probíhá $(0, 1)$, pro dané x y probíhá $(0, 1 - x)$, pro dané y z probíhá $(0, 1 - y)$]

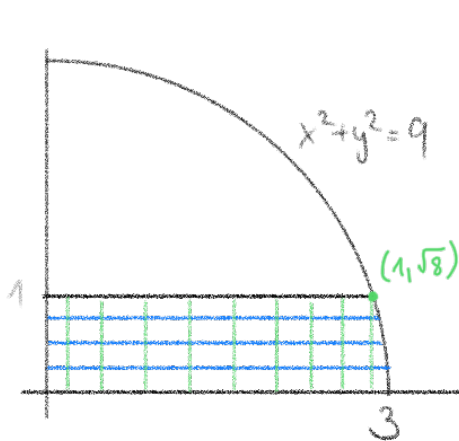
$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-y} y dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} y(1-y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - y^2) dy dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(\frac{(1-x)^2}{2} - \frac{(1-x)^3}{3} \right) dx = \left[\begin{array}{l} t=1-x \\ dt=-dx \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & 1 & 0 \end{array} \end{array} \right] \\
 &= \int_1^0 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right) (-1) dt = \int_0^1 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right) dt = \left[\frac{t^3}{6} - \frac{t^4}{12} \right]_0^1 = \\
 &= \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \underline{\underline{\frac{1}{12}}}
 \end{aligned}$$

5) Zaměňte pořadí integrace v integrálu $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y) dx dy$.

Dále vyjádřete integrál v polárních souřadnicích.

Řešení!



$$x = \sqrt{9-y^2}$$

$$x^2 = 9-y^2$$

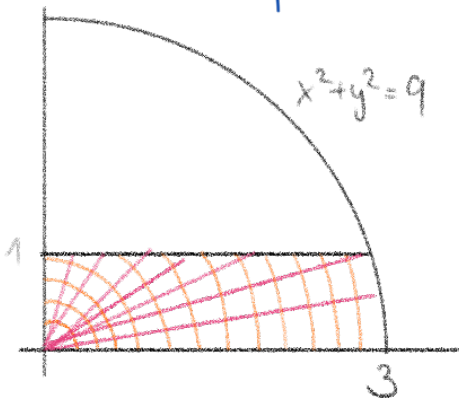
$$x^2 + y^2 = 9 \dots \text{kružnice } k(0,3) \Rightarrow y = \sqrt{9-x^2}$$

y probíhá (0,1), pro daný x probíhá $(0, \sqrt{9-x^2})$

$\leadsto$ x probíhá (0,3), ale horní mez pro y se mění v bodě $x = \sqrt{9-1} = \sqrt{8}$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y) dx dy = \int_0^{\sqrt{8}} \int_0^1 f(x,y) dy dx + \int_{\sqrt{8}}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y) dy dx$$

Převod na polární souřadnice: použijeme větu o substituci

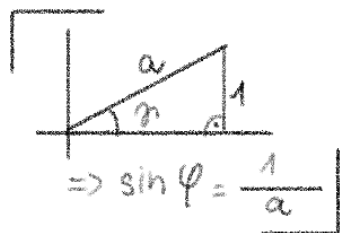


$$\phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$$

$$J_\phi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}, \det(J_\phi) = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$$

$$y=1 \Rightarrow r \sin \varphi = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{\sin \varphi}$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y) dx dy = \int_0^{\arcsin \frac{1}{3}} \int_0^3 f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r dr d\varphi +$$



$$+ \int_{\arcsin \frac{1}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sin \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r \, dr \, d\varphi$$

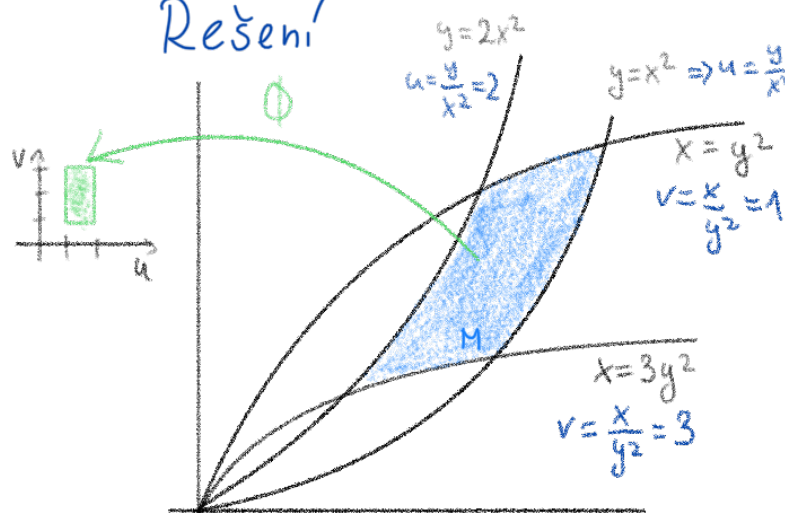
$$\stackrel{=}{=} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r \, d\varphi \, dr +$$

$$\int_1^3 \int_0^{\arcsin \frac{1}{r}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r \, d\varphi \, dr.$$

6) Vypočítejte $\int_M \frac{1}{x^2 y^2} \, d\lambda^2$, kde M je ohraničena křivkami:

$y = x^2, y = 2x^2, x = y^2, x = 3y^2$. (Nápověda: $u = \frac{y}{x^2}, v = \frac{x}{y^2}$.)

Řešení



Využijeme substituci

$$\Phi(x, y) = \left(\frac{y}{x^2}, \frac{x}{y^2} \right)$$

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} -2\frac{y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{y^2} & -2\frac{x}{y^3} \end{pmatrix}$$

$$\det(J_\Phi) = 4 \frac{xy}{x^3 y^3} - \frac{1}{x^2 y^2} = \frac{3}{x^2 y^3}$$

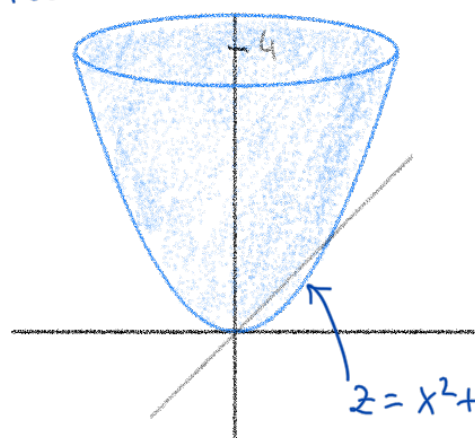
$$\int_M \frac{1}{x^2 y^2} \, d\lambda^2 = \int_M \frac{1}{3} \left(\frac{3}{x^2 y^2} \right) d\lambda^2 = \int_{\Phi(M)} \frac{1}{3} \, d\lambda^2 = \int_1^2 \int_1^3 \frac{1}{3} \, dv \, du = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}.$$

Poznámka: toto není obvyklý způsob využití věty o substituci.

7) Vypočítejte $\int_M z \, d\lambda^3$, kde M je ohraničena plochami

$z = x^2 + y^2, z = 4$.

Řešení



Použijeme válcové souřadnice

$$\Phi(r, \varphi, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$$

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \det J_\Phi = r$$

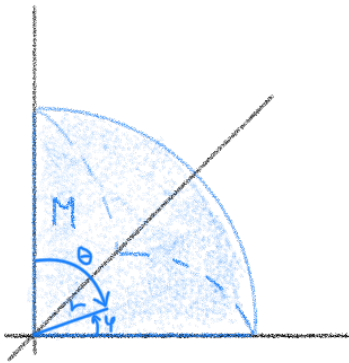
$$z = x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{z}$$

[z probíhá $(0, 4)$, pro dané z r probíhá $(0, \sqrt{z})$ a $\varphi \in (-\pi, \pi)$.]

$$\begin{aligned} \int_M z \, d\lambda^3 &= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{z}} \int_{-\pi}^{\pi} z \cdot r \, d\varphi \, dr \, dz = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{z}} z \cdot r \cdot 2\pi \, dr \, dz = \\ &= \int_0^4 \left[z 2\pi \frac{r^2}{2} \right]_0^{\sqrt{z}} dz = \int_0^4 \pi z^2 \, dz = \left[\pi \frac{z^3}{3} \right]_0^4 = \underline{\underline{\frac{64}{3} \pi}}. \end{aligned}$$

8) Vypočítejte $\int_M x e^{x^2+y^2+z^2} \, d\lambda^3$, kde M je průnikem prvního oktantu a koule $B(0, 1)$.

Řešení



Použijeme sférické souřadnice

$$\phi(r, \varphi, \theta) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$$

$$\det J_\phi = r^2 \sin \theta$$

[r probíhá $(0, 1)$, θ probíhá $(0, \frac{\pi}{2})$, φ probíhá $(0, \frac{\pi}{2})$ a jsou na sobě nezávislé]

$$\begin{aligned} \int_M x e^{x^2+y^2+z^2} \, d\lambda^3 &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sin \theta \cos \varphi \cdot e^{r^2} \cdot r^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, dr = \\ &= \left(\int_0^1 r^3 e^{r^2} \, dr \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \, d\theta \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \left[\sin \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \int_0^1 r^3 e^{r^2} \, dr = \frac{\pi}{4} \cdot 1 \cdot \int_0^1 \frac{2}{2} r^3 e^{r^2} \, dr = \left[\begin{array}{c|c|c} r^2=t & & \\ 2r \, dr=dt & & \\ \hline t & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 \underset{\substack{\uparrow \\ e^t}}{t} \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{e^t} \, dt = \frac{\pi}{8} \left(\left[t e^t \right]_0^1 - \int_0^1 e^t \, dt \right) = \frac{\pi}{8} (e - [e^t]_0^1) = \\ &= \frac{\pi}{8} (e - e + 1) = \underline{\underline{\frac{\pi}{8}}}. \end{aligned}$$