

MATEMATICKÁ ANALÝZA 4, NMMA202, LETNÍ SEMESTR 2019–2020
TEST A

LUBOŠ PICK

POČETNÍ ČÁST

Příklad A1. Necht' x, y jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte všechna maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}x' &= 6x - 3y - 30e^t, \\y' &= 15x - 6y + 45t.\end{aligned}$$

Příklad A2. Spočtěte tok vektorového pole $f(x, y, z) = (x - 3z, y + 2z, 2z^2 - y)$ hranicí $H(\Omega)$ množiny Ω zadané předpisem

$$\Omega = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 2z^2, 0 < z < 2\},$$

která je otevřená, omezená, neprázdná a splňuje $\mathcal{H}^2(H(\Omega)) < \infty$ (tato fakta již není třeba ověřovat). Ostatní kroky výpočtu zdůvodněte.

Příklad A3. Nalezněte 2π -periodickou funkci f , která je na intervalu $(-\pi, \pi]$ definována předpisem

$$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{pro } t \in (-\pi, 0), \\ t & \text{pro } t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Spočtěte Fourierovu řadu s^f funkce f . Určete, pro která $t \in \mathbb{R}$ konverguje s^f bodově a v těchto bodech určete její součet. Nalezněte maximální intervaly, na nichž s^f konverguje lokálně stejnoměrně. Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

TEORETICKÁ ČÁST

Otázka A4. Napište definici pojmu: k -rozměrná Hausdorffova míra.

Otázka A5. Napište znění věty: neurčitý Lebesgueův integrál (Věta 22.10).

Otázka A6. Zformulujte a dokažte větu: charakterisace Baireových prostorů (Věta 19.6).

$$A1 \quad \begin{cases} x' = 6x - 3y + 30e^t \\ y' = 15x - 6y + 45t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Řešení:

Soustava odpovídá λ -matici

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda - 6 & 3 & -30e^t \\ -15 & \lambda + 6 & 45t \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{-\frac{1}{3}(\lambda+6)} \\ \xleftarrow{\sim} \end{array}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}(\lambda-6)(\lambda+6) - 15 &= -\frac{1}{3}(\lambda^2+9) \\ -30e^t \left(-\frac{1}{3}(\lambda+6)\right) &= 10e^t + 60e^t \\ &= 70e^t \end{aligned}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} \lambda - 6 & 3 & -30e^t \\ -\frac{1}{3}(\lambda^2+9) & 0 & 45t + 70e^t \end{array} \right)$$

2. řádek

$$x'' + 9x = -135t - 210e^t$$

charakteristický polynom $\xi^2 + 9$, $\xi_{1,2} = \pm 3i$, FS: $\sin 3t, \cos 3t$

1. speciální pravá strana $-135t = e^{0t}(-135t \cos 0 + 1 \sin 0)$
 $0 + 0i$ není kořenem char. polynomu

partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$x_{p_1}(t) = c_1 t + c_2$$

$$x_{p_1}'(t) = c_1$$

$$x_{p_1}''(t) = 0$$

Dosadíme

$$0 + 9(c_1 t + c_2) = -135t \Rightarrow c_2 = 0, c_1 = -15$$

$$\Rightarrow x_{p_1}(t) = -15t$$

2. speciální pravá strana

$$-210e^t = e^{1t}(-210 \cos 0 + 1 \sin 0)$$

$1 + 0i$ není kořen ch. polynomu

partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$x_{p_2}(t) = c_3 \cdot e^t$$

$$x_{p_2}'(t) = c_3 \cdot e^t$$

$$x_{p_2}''(t) = c_3 \cdot e^t$$

Dosadíme

$$c_3 \cdot e^t + 9 \cdot c_3 \cdot e^t = -210e^t \Rightarrow c_3 = -21$$

$$\Rightarrow x_{p_2}(t) = -21e^t$$

$$x_p(t) = x_{p1}(t) + x_{p2}(t)$$

$$x(t) = -15t - 21e^t + a \cdot \sin 3t + b \cdot \cos 3t, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$x'(t) = -15 - 21e^t + 3a \cdot \cos 3t - 3b \sin 3t$$

1. Für die

$$x' - 6x + 3y = -30e^t$$

$$y(t) = -10e^t - \frac{1}{3}x'(t) + 2x(t)$$

$$= -10e^t + 5 + 7e^t - a \cos 3t + b \sin 3t - 30t - 42e^t + 2a \sin 3t + 2b \cos 3t$$

$$= -45e^t - 30t + 5 + a(-\cos 3t + 2 \sin 3t) + b(\sin 3t + 2 \cos 3t), \\ t \in \mathbb{R}.$$

Zuletzt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} -21e^t - 15t + a \sin 3t + b \cos 3t \\ -45e^t - 30t + 5 + a(-\cos 3t + 2 \sin 3t) + b(\sin 3t + 2 \cos 3t) \end{pmatrix},$$

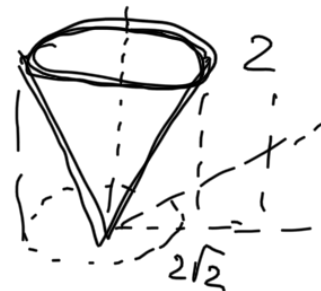
$$t \in \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

PŘÍKLAD A2 Spočítejte tok vektorového pole

$$f = (x - 3z, y + 2z, 2z^2 - y)$$

hranicí $H(\Omega)$ množiny Ω definované předpisem

$$\Omega = \{x^2 + y^2 < 2z^2, 0 < z < 2\}.$$



Řešení!

Položíme

$$h_1(x, y, z) = z - 2, \quad \nabla h_1 = (0, 0, 1) = \nu_1 \neq 0$$

$$h_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2, \quad \nabla h_2 = (2x, 2y, -4z),$$

$$\nu_2 = \frac{(2x, 2y, -4z)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}} = \frac{(x, y, -2z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}} \neq 0$$

Předpoklady Gaussovy věty: $G = \mathbb{R}^m$, $f \in C^1(G)$ zřejmě platí

ověření $\mathcal{H}^{m-1}(H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)) = 0$: funkce h_1, h_2 jsou ^{po řadě} rozlišující na

$$H_1 = \{[x, y, z] ; x^2 + y^2 < 8\} \text{ a } H_2 = \{[x, y, z], x^2 + y^2 = 2z^2, 0 < z < 2\}, \text{ takže}$$

$$H(\Omega) \setminus H_*(\Omega) \subset \{[0, 0, 0]\} \cup \{[x, y, z] ; x^2 + y^2 = 8\} \text{ (bod a kružnice), tedy}$$

$$\mathcal{H}^1(H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)) < \infty, \text{ tedy } \mathcal{H}^2(H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)) = 0.$$

výpočet toku pomocí Gaussovy věty

$$\int_{H(\Omega)} \langle f, \nu_\Omega \rangle d\mathcal{H}^2 = \int_{\Omega} \operatorname{div} f d\lambda^3 = \int_{\Omega} (2 + 4z) d\lambda^3 = (*)$$

parametrizzare: $\varphi(r, t, z) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ z \end{pmatrix}$, $t \in (0, 2\pi)$
 $z \in (0, 2)$
 $r \in (0, \sqrt{2}z)$,

$$\varphi'(r, t, z) = \begin{pmatrix} \cos t & -r \sin t & 0 \\ \sin t & r \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det \varphi' = r$$

$$(*) = \int_{\Omega} (2+4z) d\lambda^3 \stackrel{\substack{\text{Fubini} \\ + \text{substitui}}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2}z} (2+4z) r dr dz dt$$

$$= 2\pi \int_0^2 (2+4z) \int_0^{\sqrt{2}z} r dr dz = 2\pi \int_0^2 (2+4z) z^2 dz$$

$$= 4\pi \int_0^2 (z^2 + 2z^3) dz = 4\pi \cdot \left[\frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{2} \right]_0^2$$

$$= 4\pi \left(\frac{8}{3} + 8 \right) = \frac{32\pi \cdot 4}{3} = \underline{\underline{\frac{128\pi}{3}}}$$

PŘÍKLAD A2 Spočítejte tok vektorového pole

$$f = (x - 3z, y + 2z, 2z^2 - y)$$

hranicí $H(\Omega)$ množiny Ω definované předpisem

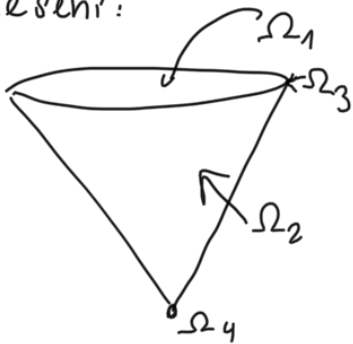
$$\Omega = \{ x^2 + y^2 < 2z^2, 0 < z < 2 \}.$$

Řešení A2 - Pomocí Area formule

$$f(x, y, z) = (x - 3z, y + 2z, 2z^2 - y)$$

$$\Omega = \{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 2z^2, 0 < z < 2 \}$$

Řešení:



$$\Omega_1 = \{ [x, y, z] : x^2 + y^2 < 8 \}$$

$$\Omega_2 = \{ [x, y, z] : x^2 + y^2 = 2z^2, z \in (0, 2) \}$$

$$\Omega_3 = \{ [x, y, z] : x^2 + y^2 = 8 \}$$

$$\Omega_4 = \{ [0, 0, 0] \}$$

$$h_1(x, y, z) = z - 2$$

$$\nabla h_1 = (0, 0, 1), \quad \nu_1 = (0, 0, 1) \neq 0$$

$$h_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$$

$$\nabla h_2 = (2x, 2y, -4z)$$

$$\nu_2 = \frac{(2x, 2y, -4z)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 16z^2}} = \frac{(x, y, -2z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}} \neq 0$$

$\mathcal{H}^2(\Omega_4) = 0$, neboť Ω_4 je bod

$\mathcal{H}^2(\Omega_3) = 0$, neboť je to krajnice a $\mathcal{H}^1(\Omega_3) < \infty$.

$$\text{Tok} = \int_{H(\Omega)} \langle f, \nu \rangle d\mathcal{H}^2 = \int_{\Omega_1} \langle f, \nu_1 \rangle d\mathcal{H}^2 + \int_{\Omega_2} \langle f, \nu_2 \rangle d\mathcal{H}^2 + 0 + 0$$

$$= \int_{\Omega_1} (2z^2 - y) d\mathcal{H}^2 + \int_{\Omega_2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}} \cdot \left((x - 3z, y + 2z, 2z^2 - y) \cdot (x, y, -2z) \right) d\mathcal{H}^2$$

$$\hookrightarrow x^2 - 3xz + y^2 + 2yz - 4z^3 + 2yz$$

Parametrizace 1.

$$\varphi(r, \alpha) = \begin{pmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} r \in (0, 2\sqrt{2}) \\ \alpha \in (-\pi, \pi) \end{matrix}$$

$(0, 2\sqrt{2}) \times (-\pi, \pi)$ je otevřená

$$\varphi'(r, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & r \cos \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{vol } \varphi' = \sqrt{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}} = r \neq 0 \Rightarrow \varphi \text{ je prostě regulární}$$

nepokrytost $\{ [-r, 0, 2] ; r \in (0, 2\sqrt{2}) \}$ Lipschitzovský obraz intervalu $(0, 2\sqrt{2})$
 $= \mathcal{H}^1 < \infty, \mathcal{H}^2 = 0$

$$\int_{\Omega_1} 2z^2 - y \, d\mathcal{L}^2 \stackrel{AF}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2\sqrt{2}} (8 - r \sin \alpha) r \, dr \, d\alpha = 16\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{2\sqrt{2}} - \int_{-\pi}^{\pi} \sin \alpha \, d\alpha \int_0^{2\sqrt{2}} r^2 \, dr$$

$$= 64\pi$$

Parametrizace 2. $\xi(r, \alpha) = \begin{pmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \\ \frac{r}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, r \in (0, 2\sqrt{2}), \alpha \in (-\pi, \pi)$ $(0, 2\sqrt{2}) \times (-\pi, \pi)$ otevřená

$$\xi'(r, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & r \cos \alpha \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \text{vol } \xi' = \sqrt{\det \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot r$$

ξ prostě regulární

nepokryto: $\{ [-r, 0, \frac{r}{\sqrt{2}}] ; r \in (0, 2\sqrt{2}) \}$... Lipschitzovský obraz intervalu $(0, 2\sqrt{2})$
 $\Rightarrow \mathcal{H}^1(\cdot) < \infty, \mathcal{H}^2(\cdot) = 0$

$$\int_{\Omega_2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}} \cdot (x^2 - 3xz + y^2 + 2yz - 4z^3 + 2yz) \, d\mathcal{L}^2 \stackrel{AF}{=}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{r^2 + 2 \frac{r^2}{2}}} \cdot \left(r^2 \cos^2 \alpha - 3 \frac{r^2}{\sqrt{2}} \cos \alpha + r^2 \sin^2 \alpha + 4 \frac{r^2}{\sqrt{2}} \sin \alpha - 4 \frac{r^3}{2\sqrt{2}} \right) \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot r \, dr \, d\alpha$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{1}{r\sqrt{3}} \cdot \left(r^2 - \frac{3}{\sqrt{2}} r^2 \cos \alpha + \frac{4}{\sqrt{2}} r^2 \sin \alpha - 4 \frac{r^3}{2\sqrt{2}} \right) \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot r \, dr \, d\alpha$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \int_0^{2\sqrt{2}} r^2 - \frac{2}{\sqrt{2}} r^3 \, dr = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \left[\frac{r^3}{3} - \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{r^4}{4} \right]_0^{2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \left(\frac{8 \cdot 2\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{16 \cdot 4}{4} \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \left(\frac{16\sqrt{2}}{3} - 16\sqrt{2} \right) = \sqrt{2} \pi \cdot 16\sqrt{2} \left(-\frac{2}{3} \right)$$

$$= -\frac{64}{3} \pi$$

$$TOK = 64\pi - \frac{64}{3} \pi = \underline{\underline{\frac{128}{3} \pi}}$$

Příklad A3. Najděte 2π -periódickou funkci f , která je na $(-\pi, \pi]$

definována předpisem $f(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, \pi] \\ 2t, & t \in (-\pi, 0) \end{cases}$.

Spočítejte Fourierovu řadu f . Určete, pro která $t \in \mathbb{R}$ konverguje tato řada a určete její součet. Najděte maximální intervaly, na nichž tato řada konverguje lokálně stejnoměrně.

S pomocí této řady určete součet číselné řady $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2}$.

Řešení! předpis f na \mathbb{R}

$$f(t) = \begin{cases} t - 2k\pi, & t \in [2k\pi, (2k+1)\pi] \\ 2(t - 2k\pi), & t \in ((2k-1)\pi, 2k\pi) \end{cases}$$

vypočet Fourierových koeficientů

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 2t dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{1}{\pi} (0 - \pi^2) + \frac{1}{2\pi} (\pi^2 - 0) = -\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 2t \cos(kt) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(kt) dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\left[t \frac{\sin(kt)}{k} \right]_{-\pi}^0 - \int_{-\pi}^0 \frac{\sin(kt)}{k} dt \right) + \frac{1}{\pi} \left(\left[t \frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(kt)}{k} dt \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(0 - \frac{1}{k} \left[-\frac{\cos(kt)}{k} \right]_{-\pi}^0 \right) + \frac{1}{\pi} \left(0 - \frac{1}{k} \left[-\frac{\cos(kt)}{k} \right]_0^{\pi} \right)$$

$$= \frac{2}{\pi k^2} (1 - \cos(-k\pi)) + \frac{1}{\pi k^2} (\cos(k\pi) - 1) = \frac{1}{\pi k^2} (2 - 2(-1)^k + (-1)^k - 1)$$

$$= \frac{1}{\pi k^2} (1 - (-1)^k) = \frac{1 - (-1)^k}{\pi k^2} = \begin{cases} \frac{2}{\pi(2j+1)^2}, & k = 2j+1, j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0, & k = 2j, j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 2t \sin(kt) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(kt) dt = \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\left[t \left(-\frac{\cos(kt)}{k} \right) \right]_{-\pi}^0 - \int_{-\pi}^0 -\frac{\cos(kt)}{k} dt \right) + \frac{1}{\pi} \left(\left[t \left(-\frac{\cos(kt)}{k} \right) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{\cos(kt)}{k} dt \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k}{k} + \frac{2}{\pi k} \left[\frac{\sin(kt)}{k} \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{k} (-1)^{k+1} + \left[\frac{\sin(kt)}{k^2} \right]_0^{\pi} \right) \\
&= -\frac{2(-1)^k}{k} - \frac{(-1)^k}{k} = \frac{3(-1)^{k+1}}{k}
\end{aligned}$$

Fourierova řada

$$s^f(t) = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos((2j+1)t)}{(2j+1)^2} + 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kt), \quad t \in \mathbb{R}$$

Konvergence Fourierovy řady

- f je rostoucí na $(-\pi, \pi)$, takže $f \in BV([-\pi, \pi])$, tedy podle Jordanova -

-Dirichletova věta s^f konverguje na \mathbb{R} a platí

$$s^f(t) = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- f je navíc spojitá na každém intervalu $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, a tedy $s_n^f \xrightarrow{\text{loc}} f$ na těchto intervalech. Tyto intervaly jsou maximalemi, protože $f((2k-1)\pi-) = \pi$, $f((2k-1)\pi+) = -2\pi$, takže f není spojitá u $(2k-1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Maximalita intervalů tedy plyne z Mooreovy-Osgoodovy věty.

Číselná řada

Položíme $t=0$. Potom f je spojitá u t a $\sin(kt)=0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Tedy

$$0 = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2}, \quad \text{takže} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$