ROVNICE SE SEPAROVANÝMI PROMĚNNÝMI

Rovnice tvaru
$$y' = g(y) \cdot h(x). \tag{1}$$

Metoda řešení pro spojité g a h

1. Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce h.

2. Najdeme všechny nulové body funkce g. Je-li totiž $g(c) = 0$, pak na každém intervalu z 1. kroku je funkce $y(x) = c$ řešením rovnice (1). Těmto řešením říkáme **singulární** nebo také **stacionární**.

3. Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je funkce g nenulová.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je spojitá na I a g je spojitá a nenulová na J. Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J. Je-li $y(x)$ takové řešení, pak pro něj platí
$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$
Nechť H je primitivní funkce k h na I a G je primitivní funkce k funkci $\frac{1}{g}$ na J. Existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že platí
$$G(y(x)) = H(x) + c$$
na definičním oboru řešení y, který nalezneme v následujícím kroku.

5. Nyní zafixujeme c a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině
$$\{x \in I; H(x) + c \in G(J)\}.$$
Na každém z těchto intervalů musí mít řešení tvar
$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c),$$
kde $G^{-1} \colon G(J) \to \mathbb{R}$ značí funkci inverzní k funkci G. Ta existuje, neboť g je na intervalu J spojitá a nenulová, tudíž nemění znaménko, a tedy G je intervalu J ryze monotónní.

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku slepíme všechna maximální řešení pomocí věty o lepení. Tedy nechť y_1 a y_2 jsou řešení rovnice (1), první na intervalu (a, b) a druhé na intervalu (b, c), přicemž $b \in D(h)$. Předpokládejme, že
$$\lim_{x \to b-} y_1(x) = \lim_{x \to b+} y_2(x) = \alpha \in D(g).$$
Pak funkce
$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a, b); \\ \alpha, & x = b; \\ y_2(x), & x \in (b, c); \end{cases}$$
je řešením rovnice (1) na intervalu (a, c).