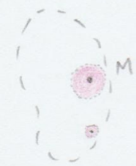
2. Seminář z Matematiky 2 - 25.2.2021

Téma: Otevřené a uzavřené množiny, funkce více proměnných

Opakování teorie

- otevřená množina: $M \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, jestliže $\forall x \in M\ \exists r>0 : B(x,r) \subset M$.



- vnitřek množiny: $x \in \text{Int}\, M$, jestliže $\exists r>0 : B(x,r) \subset M$
- hraniční bod množiny: x je hraničním bodem množiny M, jestliže

$$\forall r>0 : B(x,r) \cap M \neq \emptyset \ \wedge\ B(x,r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$$

- hranice množiny: množina všech hraničních bodů $H(M)$
- uzávěr množiny: $M \cup H(M) = \overline{M}$
- uzavřená množina: $M \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená, jestliže obsahuje všechny své hraniční body

$$(H(M) \subset M\ ,\ \ \overline{M} = M)$$

- následující tvrzení jsou ekvivalentní:
  - M je uzavřená.
  - $\mathbb{R}^n \setminus M$ je otevřená.
  - Pokud posloupnost $\{x_j\} \subset M$ konverguje k x, pak $x \in M$.

- pro spojitou funkci f na $\mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}$ platí
  - množiny $\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) < c\}$ a $\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) > c\}$ jsou otevřené
  - množiny $\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \leq c\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \geq c\}$ a $\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) = c\}$ jsou uzavřené.

Otázka

Existuje $M \subset \mathbb{R}^n$, která je otevřená a zároveň uzavřená?

Ano, jsou dvě, $\emptyset$ a $\mathbb{R}^n$.

Žádné další množiny tuto vlastnost nemají.

Pokud $M \subset \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$, $M \neq \mathbb{R}^n$, pak je buď otevřená, nebo uzavřená, nebo není ani otevřená ani uzavřená.

Vzorové příklady v $\mathbb{R}$: $[0,1]$ je uzavřená, $(0,1)$ je otevřená

$[0,1)$ není ani otevřená, ani uzavřená

Příklady

Rozhodněte, zda jsou následující množiny otevřené, uzavřené, určete $\text{Int}\, M$ a $H(M)$.

a) $M = \{x\}$, x je fixní bod z $\mathbb{R}^n$

Otevřenost: M není otevřená, neboť $(\exists x \in M)\ \forall r>0 : B(x,r) \not\subset M$

navíc dostáváme, že $\text{Int}\, M = \emptyset$

uzavřenost: určíme hraniční body : $x \in H(M)$, neboť $\forall r>0: B(x,r)\cap M=\{x\}\neq\emptyset$

$B(x,r)\cap \mathbb{R}^n\setminus M = B(x,r)\setminus\{x\}\neq\emptyset$.

$y\in\mathbb{R}^n$, $y\neq x$, není v $H(M)$, neboť $B(y,\frac{|x-y|}{2})\subset\mathbb{R}^n\setminus\{x\}$

Tedy $\{x\}=H(M)$ a tedy M je uzavřená.

(Jinak • Přes otevřenost $\mathbb{R}^n\setminus M$ (pro $y\neq x$ $\exists$ koule jako výše)

• Existuje pouze jedna posloupnost a ta konverguje k $x\in M$ => uzavřenost)

b) $M=\{x_1,x_2\}$, $x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$ jsou fixní, $x_1\neq x_2$

Víme, že konečné sjednocení uzavřených množin je uzavřená množina.

$\{x_1\}$ i $\{x_2\}$ jsou uzavřené množiny, tedy $M=\{x_1\}\cup\{x_2\}$ je uzavřená.

M tedy není otevřená.

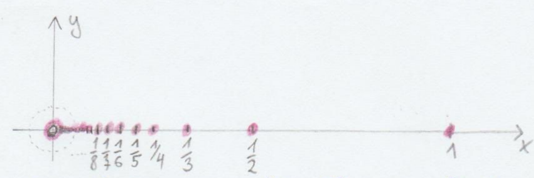
$\mathrm{Int}\, M=\emptyset$ a $H(M)=M$ stejně jako minule.

Poznámka

Sjednocení nezachovává vnitřek ani hranici.

- $\mathrm{Int}\,\mathbb{Q}=\emptyset$, $\mathrm{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=\emptyset$. $\mathrm{Int}(\mathbb{Q}\cup(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}))=\mathbb{R}$.
- $H((-\infty,0])=\{0\}$, $H([0,\infty))=\{0\}$, $H((-\infty,0]\cup[0,\infty))=\emptyset$.

c) $M=\{[\frac{1}{n},0], n\in\mathbb{N}\}\subset\mathbb{R}^2$



Tentokrát nemůžeme použít sjednocení uzavřených, neboť bodů nemáme konečně mnoho.

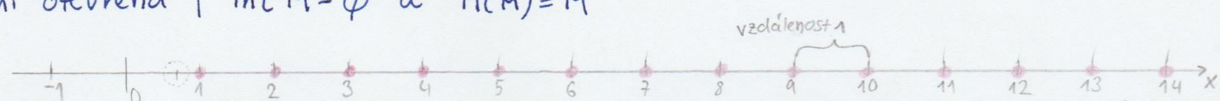
Obdobně jako na supersemináři můžeme ukázat, že M není ani otevřená, ani uzavřená, $\mathrm{Int}\, M=\emptyset$ a $H(M)=M\cup\{[0,0]\}$

d) $M=\{[\frac{1}{n},0], n\in\mathbb{N}\}\cup\{[0,0]\}$

M je uzavřená, neboť (z předchozího) obsahuje všechny svoje hraniční body

M tedy není otevřená, $\mathrm{Int}\, M=\emptyset$ a $H(M)=M$

e) $M=\mathbb{N}$



Opět nemůžeme rovnou použít větu o sjednocení uzavřených, neboť bodů je nekonečně mnoho. Ale tentokrát jsou od sebe všechny body vzdáleny alespoň o 1, nenastane podobný problém jako v c), $H(M)=M$.

Tedy kdykoli $\exists\, c>0$, že $\forall x,y\in M, x\neq y$, platí $\rho(x,y)>c$, pak je M uzavřená

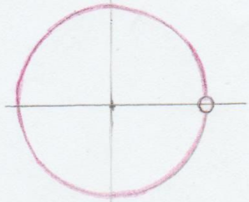
Připomenutí ze supersemináře, nejedná se o kompletní řešení

f) $M=$ jednotková kružnice v $\mathbb{R}^2$

Můžeme zapsat $M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2, x^2+y^2=1\}$. $f(x,y)=x^2+y^2$ je spojitá funkce na $\mathbb{R}^2$.

Tedy M je podle věty 12 uzavřená. $M = H(M)$, $\operatorname{Int} M = \emptyset$.

Otázka: A co kružnice bez bodu?



g) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + e^y > 17\}$

Vezmeme funkci $f(x,y) = x^2 + e^y$.

Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}^2$, neboť x^2 je spojitá na $\mathbb{R}$, e^y je spojitá na $\mathbb{R}$, součet je spojitý.

Odtud a z věty 12 je M otevřená.

M není ani $\emptyset$ ($[5,0] \in M$) ani $\mathbb{R}^n$ ($[0,0] \notin M$), tedy M není uzavřená.

$\operatorname{Int} M = M$ z definice otevřenosti.

Hraniční body

- bod $[x,y]$, $x^2 + e^y = 17$, je hraniční:

  Vezmeme $\varepsilon > 0$. Vidíme, že $x^2 + e^{y+\varepsilon} = x^2 + e^{\varepsilon} \cdot e^y > x^2 + e^y = 17$, tedy $[x, y+\varepsilon] \in M$.
  $[x,y] \notin M$

  Tedy $\forall r > 0$ $\quad [x, y+\frac{r}{2}] \in M \cap B([x,y], r)$ a $[x,y] \in (\mathbb{R}^n \setminus M) \cap B([x,y], r)$.

  Tedy $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x^2 + e^y = 17\} \subset H(M)$.

- M je otevřená, tedy neobsahuje body hranice.
- $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + e^y < 17\}$ je otevřená (stejný argument), tedy také neobsahuje body hranice.

Tedy $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x^2 + e^y = 17\} = H(M)$.

Samostatná práce

h) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$

Rozmyslete: Jak by vypadal takový disk v $\mathbb{R}^3$? Byl by otevřený/uzavřený?

ch) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \geq 1\}$

i) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 + 2xy = 5\}$

j) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y > 0, x + y = 2, z \leq 0\}$

Hint: Ukažte, že některé hraniční body tam jsou, některé ne.