7. Seminář z Matematiky 2 - 1.4.2021

Téma: Extrémy funkcí více proměnných - bez použití Lagrangeových multiplikátorů

Ingredience z teorie

- Věta 13: $M \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní množina $\iff$ M je uzavřená a omezená
- Věta 15: $M \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná a kompaktní, $f: M \to \mathbb{R}$ spojitá na M.

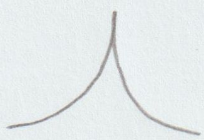
  Pak f nabývá na M svého maxima a minima.
- Věta 12: Nechť f je spojitá na $\mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}$. Pak $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < c\}$ je otevřená, (totéž s $>$),

  $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq c\}$ je uzavřená, (totéž s $\geq, =$).
- pojmy (ostré) maximum na M , (ostré) lokální maximum na M. Totéž pro minima.

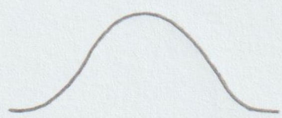
  $\forall y \in M : f(y) \leq f(x)$ $\qquad$ $\exists \delta > 0\ \forall y \in B(x, \delta) : f(y) \leq f(x)$
- Věta 17: Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$, $f: G \to \mathbb{R}$ má v bodě a lokální extrém. Pak $\forall j \in \{1, \dots, n\}$

  platí $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \text{ buď neexistuje, nebo je rovna nule}}$

  Nutná podmínka existence lokálního extrému

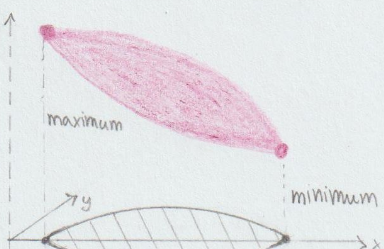


extrém typu Ještěd



extrém typu Říp

Globální extrémy



Jak na příklady

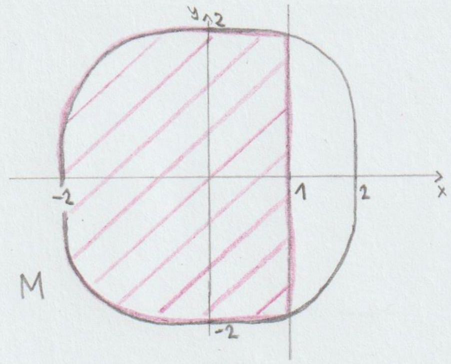
Dostaneme zadanou množinu M a funkci f.

1) zorientovat se, co se tam děje, načrtnout, ...
2) Vidím-li zlehčovák, použiju ho. (symetrie atd.)
3) Pokud to umím bez věty o Lagrangeových multiplikátorech, udělám to.
4) Pokud mohu ukážu existenci extrému (z kompaktnosti M) a určím podezřelé body. Porovnám hodnoty.

Příklad 1

Rozhodněte, zda funkce $f(x,y) = x \cdot y^6$ má na množině $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 ; x^6 + y^6 \leq 64, x \leq 1\}$ globální extrémy a pokud ano, určete je.

Řešení



1) ověření existence extrému

- M je omezená, neboť $[x,y] \in M \Rightarrow x \in \langle -2,2\rangle,\ y \in \langle -2,2\rangle$
- M je uzavřená: $M = M_1 \cap M_2$, kde $M_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2,\ x^6 + y^6 \leq 64\}$
  $M_2 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2,\ x \leq 1\}$

  Položme $g_1(x,y) = x^6 + y^6$. Potom $g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá (polynom) a platí $M_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2,\ g_1(x,y) \leq 64\}$. Tudíž M_1 je uzavřená.

  Položme $g_2(x,y) = x$. Potom $g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá (polynom) a platí $M_2 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2,\ g_2(x,y) \leq 1\}$. Tudíž M_2 je uzavřená

  $M = M_1 \cap M_2$ je tedy také uzavřená.

- $f(x,y) = xy^6$ je spojitá funkce.
- Tedy M je kompaktní (uzavřená + omezená) a f (spojitá) na M nabývá svého maxima a minima

2) hledání extrémů

Obecně: na vnitřku (ot. množina) hledáme stacionární body a body kde parciální derivace neexistuje

na hranici – metoda Lagrangeových multiplikátorů – algoritmická, ale zdlouhavá, technická

– parametrizace + vlastní hlava

Vnitřek: $\operatorname{Int} M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2,\ x^6 + y^6 < 64,\ x < 1\}$

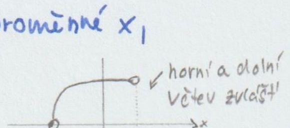
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y^6 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 6xy^5 \end{aligned}\right\}$$

stacionární body (tj. kde obě derivace $= 0$)

$S = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2,\ y = 0,\ x \in (-2,1)\}$

Hranice: Rozdělíme na $H_1 = \{[x,y],\ x^6 + y^6 = 64,\ x \in \langle -2,1\rangle\}$ a $H_2 = \{[x,y],\ x = 1,\ y \in \langle -\sqrt[6]{63}, \sqrt[6]{63}\rangle\}$

H_1: Máme $y^6 = 64 - x^6$. Dosadíme do $f(x,y) = x \cdot y^6$ (vznikne složená funkce proměnné x, vyšetříme její extrémy) (opět "uvnitř" a na hranici)



Definujeme $F(x) = x \cdot (64 - x^6)$. Pak $F'(x) = 64 - 7x^6$.

$F'(x)=0 \iff x=\frac{\pm 2}{\sqrt[6]{7}}$.

Odhadneme, že $\frac{2}{\sqrt[6]{7}}>1$, tedy do H_1 budou patřit pouze body s $x=\frac{-2}{\sqrt[6]{7}}$

Podezřelé body z extrému: $A=\left[-\frac{2}{\sqrt[6]{7}}, -2\cdot\frac{\sqrt[6]{6}}{\sqrt[6]{7}}\right]$

$B=\left[-\frac{2}{\sqrt[6]{7}}, 2\cdot\frac{\sqrt[6]{6}}{\sqrt[6]{7}}\right]$.

+Krajní body $C=[-2,0]$

$D=[1,\sqrt[6]{63}]$

$E=[1,-\sqrt[6]{63}]$

H_2: Máme $x=1$. Definujeme $G(y)=f(1,y)=y^6$. $G'(y)=6y^5$.

$G'(y)=0 \iff y=0$.

Bod podezřelý z extrému: $F=[1,0]$

(+ Krajní body D, E)

3) Porovnání funkčních hodnot v podezřelých bodech:

$f(A)=f(B)=-\frac{2}{\sqrt[6]{7}}\cdot\frac{64\cdot 6}{7}$ .... záporné číslo

$f(D)=f(E)=63$ ..... kladné číslo

$[x,y]\in S \Rightarrow f(x,y)=0$

$f(F)=f(C)=0$

Závěr: Funkce f nabývá na M globálního maxima v bodech $[1,\pm\sqrt[6]{63}]$, a globálního minima v bodech $\left[-\frac{2}{\sqrt[6]{7}}, \pm 2\cdot\frac{\sqrt[6]{6}}{\sqrt[6]{7}}\right]$.

Příklad 2 (na ukázku figle)

Určete extrémy funkce $f(x,y,z)=(x+y)^2+(x-y)^2+z$ na množině $M=\langle -1,1\rangle^3$

Řešení:

Množina M je uzavřená jednotková krychle $\Rightarrow M$ je kompaktní. Spojitá f zde nabývá extrémů.

Podíváme se na předpis f a vidíme, že f je lichá v proměnné z.

Tedy maximum $\in \langle -1,1\rangle^2\times\{1\}$

minimum $\in \langle -1,1\rangle^2\times\{-1\}$

Stačí určit extrémy funkce $G(x,y)=(x+y)^2+(x-y)^2=2(x^2+y^2)$ na $\langle -1,1\rangle^2$

$x^2\in\langle 0,1\rangle$, $y^2\in\langle 0,1\rangle \Rightarrow G(x,y)\in\langle 0,4\rangle$ a $G(x,y)=0 \iff [x,y]=[0,0]$

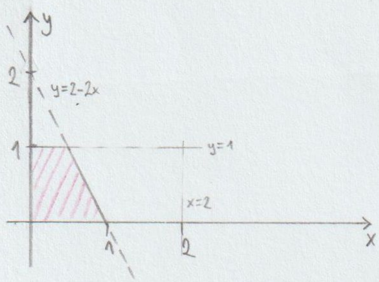
$G(x,y)=4 \iff [x,y]=[\pm 1,\pm 1]$

Závěr: Funkce f na množině M nabývá globálního maxima 5 v bodech $[\pm 1,\pm 1,1]$ a ostrého globálního minima -1 v bodě $[0,0,-1]$.

Příklad 3

Rozhodněte, zda funkce $f(x,y)=x$ má na množině $M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2,\ x\in\langle 0,2\rangle, y\in\langle 0,1\rangle, 2x+y\leq 2\}$ globální extrémy a pokud ano, určete je.

Řešení



- $M=\{[x,y], x\leq 2\}\cap\{[x,y], x\geq 0\}\cap\{[x,y], y\leq 1\}\cap\{[x,y], y\geq 0\}\cap\{[x,y], 2x+y\leq 2\}$, tedy průnik pěti uz. úrovňových množin spojitých funkcí, tedy je uzavřená. Navíc $M\subset\langle 0,2\rangle\times\langle 0,1\rangle$, tedy je omezená. M je tudíž kompaktní a spojitá f nabývá na M extrémů.
- Víme $\forall [x,y]\in M: x\in\langle 0,1\rangle \Rightarrow \forall [x,y]\in M.\ f(x,y)\in\langle 0,1\rangle$

  $f(x,y)=0 \Leftrightarrow x=0 \Leftrightarrow [x,y]\in\{[0,y], y\in\langle 0,1\rangle\}$

  $f(x,y)=1 \Leftrightarrow x=1 \Leftrightarrow [x,y]=[1,0]$

Závěr

Funkce f nabývá na M ostrého globálního maxima 1 v bodě $[1,0]$ a globálního minima 0 na množině $\{[0,y], y\in\langle 0,1\rangle\}$.