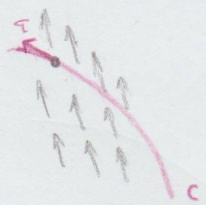
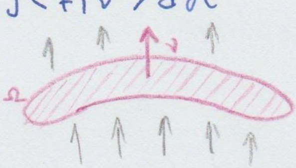
12. cvičení z MA4 - Křivkový a plošný integrál - opakování - Cauchyův součin

Opakování

- area formule $\boxed{\int_{\varphi(G)} f(x)\, d\mathcal{H}^k(x) = \int_G f(\varphi(t)) \operatorname{vol}\varphi'(t)\, d\lambda^k(t)}$ - převádí $\mathcal{H}^k$ integrál na λ^k integrál pomocí vhodné prosté a regulární parametrizace.
  - $\operatorname{vol}\varphi' = \sqrt{\det(\varphi'(t)^T \varphi'(t))}$ (pro $k=n-1$ případně $\operatorname{vol}\varphi' = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}} \right\|$)

- integrální věty a křivkový a plošný integrál

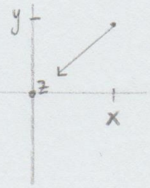
$n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

	$K=1$ (dimenze 1)	$K=n-1$ (kodimenze 1)
Zkoumáme	$\int \langle f, \tau \rangle\, d\mathcal{H}^1$ 	$\int \langle f, \nu \rangle\, d\mathcal{H}^{n-1}$ ("tok vektorového pole") 
Fyzikálně	„Jakou práci vykoná pole působící silou $\vec{F}$ při přesunu HB z bodu $c(a)$ do bodu $c(b)$ po křivce c"	„Kolik vody proteče plochou za jednotku času, teče-li rychlostí $\vec{v}$"
Odpovídající integrály	Křivkový integrál 2. druhu $\int_c f \cdot dc = \int_a^b \langle f(c(t)), c'(t) \rangle\, dt$ ↳ jakákoli křivka po částech regulární	Plošný integrál 2. druhu $\int_\phi f \cdot d\phi = \int_G \langle f(\phi(x)), \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_1} \times \dots \times \frac{\partial \phi}{\partial x_{n-1}}(x) \rangle\, d\lambda^{n-1}$ ↳ $\phi \in C_1(G)$, $G \in \mathbb{R}^{n-1}$
Značení	$\int f_1\, dx_1 + f_2\, dx_2 + \dots + f_n\, dx_n$	$(n=3)$ $\int f_1\, dx_2 dx_3 + f_2\, dx_3 dx_1 + f_3\, dx_1 dx_2$
Věty	$(n=2)$ Greenova věta - pro uzavřené křivky, + orientace $\boxed{\int_{H(\Omega)} \langle f, \tau \rangle\, d\mathcal{H}^1 = \int_\Omega \operatorname{curl} f\, d\lambda^2}$ $(n=3)$ Stokesova věta - pro uzavřené křivky, orientace $\boxed{\int_{H(\Omega)} \langle f, \tau \rangle\, d\mathcal{H}^1 = \int_{\Omega} \langle \operatorname{curl} f, \nu \rangle\, d\mathcal{H}^2}$ $\Omega \to$ plocha	Gaussova věta - pro "uzavřené" plochy orientované "ven" $\boxed{\int_{H(\Omega)} \langle f, \nu \rangle\, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_\Omega \operatorname{div} f\, d\lambda^n}$

Příklad 3.37 Spočtěte práci silového pole, které působí v každém bodě $[x,y,z]$, $[x,y] \neq [0,0]$ (mimo osu z) silou nepřímo úměrnou druhé mocnině vzdálenosti od osy z a mířící kolmo k ose z. Určete, jaká práce se vykoná při pohybu hmotného bodu po čtvrtkružnici $c = \{[\cos t, 1, \sin t], t \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$

Rozbor zadání

- pole: velikost: $\dfrac{k}{x^2+y^2}$ směr:

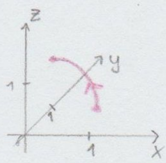


$(-x, -y, 0)$

k… konstanta úměrnosti

tedy

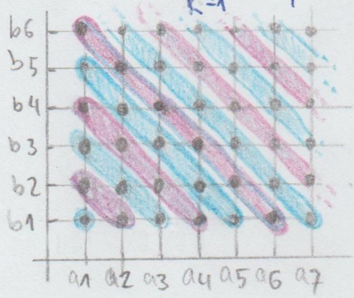
$$f(x,y,z) = \frac{k}{x^2+y^2} \cdot \frac{(-x,-y,0)}{\sqrt{x^2+y^2+0}} = k \cdot \frac{(-x,-y,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$



- čtvrtkružnice má orientaci zadanou
- počítáme křivkový integrál, neboť zkoumáme pohyb po křivce (v různých bodech křivky působí pole různou silou, na to se hodí integrace)
- ilustrační video na stránce

Téma: Cauchyův součin

- Definice: Mějme řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Jejich Cauchyovým součinem nazveme řadu $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, kde $c_k = \sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i$, $k \in \mathbb{N}$.



součet indexů sčítanců v c_k je $k+1$

(v případě počítání od nuly $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_{k-i} b_i$)

Věty

- $\sum a_n$ AK $\wedge$ $\sum b_n$ K $\Rightarrow$ $\sum c_k$ K a $\sum c_k = (\sum a_n) \cdot (\sum b_n)$ (Mertens)
- $\sum a_n$ AK $\wedge$ $\sum b_n$ AK $\Rightarrow$ $\sum c_k$ AK
- $\sum a_n$ K $\wedge$ $\sum b_n$ K $\not\Rightarrow$ $\sum c_k$ K. Protipříklad: $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
- $\sum a_n$ K $\wedge$ $\sum b_n$ K $\wedge$ $\sum c_k$ K $\Rightarrow$ $\sum c_k = (\sum a_n) \cdot (\sum b_n)$ (Abel)

Příklad 4.5 (i) Utvořte Cauchyův součin řad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!}$ a spočtěte jeho součet.

Řešení

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{2^{k-i}}{(k-i)!} \cdot \frac{1}{2^i i!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} 2^{k-2i} \cdot \frac{k!}{(k-i)!\, i!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} 2^{k-i} \cdot \frac{1}{2^i} \overset{\text{Binomická}}{\underset{\text{věta}}{=}} \frac{1}{k!} \left(2 + \frac{1}{2}\right)^k$$

Tedy řešíme $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(2+\frac{1}{2}\right)^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{5}{2}\right)^k = \underline{\underline{e^{\frac{5}{2}}}}$

Příklad: Pomocí Cauchyova součinu nalezněte součet řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$, $|x|<1$.

Řešení: nalezneme 2 řady $\sum a_n$ a $\sum b_n$, jejichž součty známe a pro něž platí

$n x^{n-1} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{n+1-i} b_i$ $\rightsquigarrow$ n sčítanců, součet mocnin x chceme $n-1$

$$\sum_{i=1}^{n} x^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} x^{(n-1)+1-i} x^{(i-1)} \Rightarrow a_n = b_n = x^{n-1}$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ je Cauchyův součin řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ sama se sebou,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$, je AK, tedy dle Mertensovy věty $\underline{\underline{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2}}$, $|x|<1$.

Příklad 4.5 (iii) Utvořte Cauchyův součin řad $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$ a spočtěte jeho součet.

Řešení

$$c_k = \sum_{i=0}^{k}(k-i+1)x^{k-i}(-1)^i(i+1)x^i = x^k \underbrace{\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(k-i+1)(i+1)}_{k \text{ liché} \Rightarrow \text{ půjdou proti sobě s opačnými znaménky}}$$

Rozdělme na liché a sudé:

$$c_{2k+1} = x^{2k+1}\sum_{i=0}^{2k+1}(-1)^i(2k+1-i+1)(i+1) = x^{2k+1}\Big(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(2k+2-i)(i+1) + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{2k+1}(-1)^i(2k+2-i)(i+1)}_{k \text{ a } k+1 \text{ stejné o znaménko, 0 a } 2k+1 \text{ též}}\Big)$$

$$= x^{2k+1}\Big(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(2k+2-i)(i+1) - \sum_{\bar{i}=0}^{k}(-1)^{\bar{i}}(2k+2-\bar{i})(\bar{i}+1)\Big) = 0$$

$$c_{2k} = x^{2k}\sum_{i=0}^{2k}(-1)^i(2k-i+1)(i+1) = x^{2k}\Big(\sum_{i=0}^{2k+1}(-1)^i(2k-i+1)(i+1) - 0\Big) =$$

$$= x^{2k}\Big(\sum_{i=0}^{2k+1}(-1)^i(2k-i+2)(i+1) - \sum_{i=0}^{2k+1}(-1)^i(i+1)\Big) = x^{2k}\big(0-(-k-1)\big) =$$

$$= x^{2k}(k+1)$$

Tedy sčítáme $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^{2k}(k+1) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(x^2)^k(k+1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k(x^2)^{k-1} = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2$

Závěr: Cauchyův součin zadaných řad má součet $\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2$.