4. Cvičení z MA 4 - Metrické prostory 3 (2/3)

Téma: Kategorie, separabilita, kompaktnost

1) DÚ z minula

Př 2.2 Nalezněte (P, ρ) a posloupnost neprázdných uzavřených množin $\{F_m\}_{m=1}^{\infty}$ takovou, že $F_{m+1} \subset F_m$ pro každé $m \in \mathbb{N}$ a $\bigcap_{m=1}^{\infty} F_m = \emptyset$.

Řešení: například $(\mathbb{R}, \text{eukl})$ a $F_m = [m, \infty)$.

(tedy je splněno skorovšechno z charakterizace úplnosti ALE $\operatorname{diam} F_m \to 0$ NE, proto toto nefunguje)

2) Připomeňme si, že v $(C[0,1], \sup)$ není uzavřená jednotková koule kompaktní (na to stačí posloupnost, kde $\|f_n - f_m\| \geq \frac{1}{2}$ $\forall m \neq n$) a tedy ani totálně omezená.

Důsledek 1. Žádná koule v $(C[0,1], \sup)$ není totálně omezená.

Důsledek 2. Kompaktní množiny v $(C[0,1], \sup)$ jsou řídké.

Důkaz.

Definice říká, že A je v P řídká, pokud $P \setminus \overline{A}$ je hustá v P

V našem případě: $K \subset C[0,1]$ kompaktní, chceme: $C[0,1] \setminus \overline{K}$ je hustá v $C[0,1]$.

K je kompaktní, a tedy uzavřená $\Rightarrow$ chceme: $C[0,1] \setminus K$ hustá v $C[0,1]$

Tedy chceme: $(C[0,1] \setminus K) \cap G \neq \emptyset$ pro každou G otevřenou v $C[0,1]$ (z Věty 19.1)

Tedy chceme: $\operatorname{Int} K \neq \emptyset$ (případně z charakterisace řídkých - Věta 19.3 - rovnou)

To ale máme: Kdyby $B(x,r) \subseteq \operatorname{Int} K$, pak $\overline{B(x,r)}$ je kompaktní. Spor. $\square$

3) Příklad 2.4 Ukažte, že prostor ℓ^2 je úplný, separabilní a jeho jednotková koule není totálně omezená.

Řešení: připomeňme: $\ell^2 = \{x = \{x_m\}_{m=1}^{\infty} \mid \sum_{m=1}^{\infty} x_m^2 < \infty\}$, norma $\|x\| = \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} x_m^2}$

a) úplnost: Nechť $\{x^j\}$ je Cauchyovská posloupnost v ℓ^2 (posloupnost posloupností)

Potom (v každé složce) $\forall k \in \mathbb{N}$ je $\{x_k^j\}_{j=1}^{\infty}$ je také Cauchyovská $\ulcorner \forall \varepsilon \, \exists n_0 \, \forall m, n \geq n_0 : \|x^m - x^n\| < \varepsilon \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : |x_k^m - x_k^n| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^m - x_k^n|^2} < \varepsilon \lrcorner$

Tedy $\forall k \in \mathbb{N}$ je $\{x_k^j\}_{j=1}^{\infty}$ Cauchyovská v $\mathbb{R} \Rightarrow \exists x_k = \lim_{j \to \infty} x_k^j$

Položme $x := \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$

Chceme
1) $x \in \ell^2$
2) $x^j \to x$ v ℓ^2

} Pak bude každá Cauchyovská posloupnost konvergentní v ℓ^2 a tedy ℓ^2 bude úplný.

ad1) Víme: $\forall \varepsilon \exists n_0 \forall m,n \geq n_0: \|x^m - x^n\| < \varepsilon$

Speciálně $\forall n \geq n_0: \|x^{n_0} - x^n\| < \varepsilon$

Chceme: $\sum_{m=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$

K tomu ale stačí: $\exists M < \infty \forall m \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^{m} x_k^2 \leq M$

(neboť pak přejdeme k limitě pro $m \to \infty$)

Nalezneme takové M: Zvolme m pevné, položme $\varepsilon = 1$.

K $\varepsilon = 1$ nalezneme n_0 z Cauchyovskosti.

K m nalezneme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, takové, že

$$\forall k \in \{1, \dots, m\}: (x_k)^2 - (x_k^n)^2 \leq \frac{1}{m}$$

neboť $\forall k \in \mathbb{N}: x_k^j \xrightarrow[j \to \infty]{} x_k$. ($\forall k \in \{1, \dots, m\}$ najdeme n_k, pak vezmeme $\max_k \{n_k\}$)

a tedy $(x_k)^2 \leq (x_k^n)^2 + \frac{1}{m}$. Sečtením m sčítanců dostaneme

$$\sum_{k=1}^{m} (x_k)^2 \leq \sum_{k=1}^{m} (x_k^n)^2 + 1 \leq \|x^n\|^2 + 1$$

Z Cauchyovskosti plyne $\|x^n\| \leq \|x^n - x^{n_0}\| + \|x^{n_0}\| < \overset{1}{\varepsilon} + \|x^{n_0}\|$

Celkem:

$$\sum_{k=1}^{m} |x_k|^2 \leq \overbrace{(\|x^{n_0}\| + 1)^2 + 1}^{M}$$

a tedy $x \in \ell^2$

ad2) Chceme: $\lim_{j \to \infty} \|x_j - x\|_{\ell^2} = \lim_{j \to \infty} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^j - x_k|^2} = 0$

Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}: \forall m,n \geq n_0: \|x^m - x^n\| < \varepsilon$

Zvolíme pevné $q \in \mathbb{N}$. Potom $\forall m,n \geq n_0: \left(\sum_{k=1}^{q} (x_k^m - x_k^n)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x^m - x^n\| < \varepsilon$

Limitním přechodem $m \to \infty$ při pevném n dostaneme

$$\left(\sum_{k=1}^{q} (x_k - x_k^n)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \quad \text{(VOAL, konečný součet)}$$

Limitním přechodem $q \to \infty$ dostaneme

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - x_k^n)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon$$

a tedy $x^n \to x$ v ℓ^2

$\Rightarrow \ell^2$ je úplný

b) Separabilita: Chceme ukázat, že ℓ^2 obsahuje spočetnou hustou podmnožinu

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme $A_n = \{y \in \ell^2, y_k = 0 \ \forall k > n, y_k \in \mathbb{Q} \ \forall k \leq n\}$

a $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Pak A je spočetná. Ukážeme, že je hustá.

Chceme $\forall x \in \ell^2 \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists y \in A: \|x - y\| < \varepsilon$. Zafixujme $x \in \ell^2$, $\varepsilon > 0$.

Najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} x_n^2 < \varepsilon^2$ (lze, neboť $x \in \ell^2$)

Dále $\forall j \in \{1, \dots, n_0\}$ najdeme $y_j \in \mathbb{Q}$ tak, aby $(x_j - y_j)^2 < \frac{\varepsilon^2}{n_0}$

(z hustoty $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$). Položme $y = (y_1, \dots, y_{n_0}, 0, 0, 0 \dots)$

Potom $\|x-y\|_{\ell^2} = \left(\sum_{j=1}^{\infty}(x_j-y_j)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{m_0}(x_j-y_j)^2 + \sum_{j=m_0+1}^{\infty}(x_j-y_j)^2\right)^{\frac{1}{2}} =$

$$= \left(\sum_{j=1}^{m_0}(x_j-y_j)^2 + \sum_{j=m_0+1}^{\infty} x_j^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(m_0 \cdot \frac{\varepsilon^2}{m_0} + \varepsilon^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\,\varepsilon$$

Tedy ℓ^2 je separabilní. (ke každému $x \in \ell^2$ umíme najít $y \in A$ - spočetní husté)

c) jednotková koule není totálně omezená

Pozorování 1) najdeme-li v (P, ρ) nekonečnou množinu A a $\delta > 0$ tak, že $\forall x, y \in A$, $x \neq y$ platí $\rho(x,y) \geq \delta$, pak P není totálně omezený.

2) Najdeme-li takovou A nespočetnou, pak P není ani separabilní.

Označme $e_j \in \ell^2$, $j \in \mathbb{N}$: $e_j = (\overset{1}{0}, \dots, \overset{j-1}{0}, \overset{j}{1}, \overset{j+1}{0}, \dots)$

Pak $e_j \in \ell^2$, $\|e_j\|_{\ell^2} = 1$. Navíc $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$, $i \neq j$. Tedy existuje $A = \{e_j, j \in \mathbb{N}\}$ nekonečná a $\delta = \sqrt{2}$ z Pozorování 1, a tedy jednotková koule není totálně omezená. (Neexistuje konečná $\frac{\delta}{2}$ - síť)

4) Příklad 2.14 a 2.15: Nechť $P = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a $\rho(m,n) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n}$. Definujeme zobrazení $T: n \to n^2$. Toto zobrazení zřejmě nemá pevný bod. Je T kontrakce?

$$\Rightarrow \frac{\rho(T(m), T(n))}{\rho(m,n)} = \frac{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}} = \frac{\frac{n^2 - m^2}{m^2 n^2}}{\frac{n-m}{m \cdot n}} = \frac{m+n}{m \cdot n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} < 1 \quad \text{ANO}$$

K zamyšlení:

Tedy máme kontrakci, která nemá pevný bod. Jak je to možné?

Je zobrazení $T: n \to n+1$ kontrakce? Je neexpansivní?