5. Cvičení z MA 4 - Metrické prostory 3 (3/3)

Téma: Souvislost, Křivková souvislost

Definice

- Řekneme, že množina A je souvislá, jestliže ji nelze zapsat jako sjednocení dvou disjunktních neprázdných otevřených množin v (P,ρ).
- Řekneme, že množina A je křivkově souvislá, jestliže $\forall x,y \in A$ existuje spojité zobrazení $\gamma: [0,1] \to (A,\rho)$ takové, že $\gamma(0) = x$ a $\gamma(1) = y$.

KVÍZ na souvislost a křivkovou souvislost

Následující otázky si nejprve zkuste odpovědět sami, poté si zkontrolujte odpovědi.

1) Je sjednocení dvou souvislých množin souvislá množina?

2) Je průnik dvou souvislých množin souvislá množina?

3) Je sjednocení dvou souvislých množin s neprázdným průnikem souvislá množina?

4) Je spojitý obraz souvislé množiny souvislá množina?

5) Je spojitý vzor souvislé množiny souvislá množina?

6) Platí, že pokud A je souvislá a $A \subset B \subset \bar{A}$, pak B je souvislá?

7) Je každá křivkově souvislá množina souvislá?

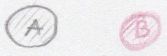
8) Platí, že pokud A je křivkově souvislá a $A \subset B \subset \bar{A}$, pak B je křivkově souvislá?

9) Platí, že pokud A a $\bar{A}$ jsou křivkově souvislé a $A \subset B \subset \bar{A}$, pak B je křivkově souvislá?

10) Nechť P je souvislý metrický prostor, který obsahuje více než jeden bod. Může se stát, že P by byl spočetný?

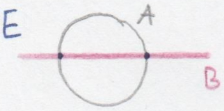
Odpovědi

1) NE



A souvislá, B souvislá, $A \cup B$ není souvislá

2) NE

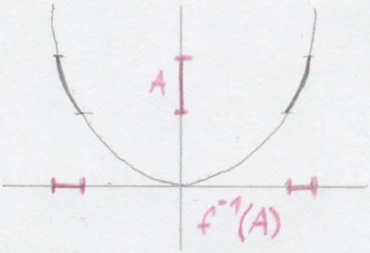


A souvislá, B souvislá, $A \cap B$ dva body

3) ANO, věta 19.25

4) ANO, věta 19.23

5) NE



6) ANO, věta 19.24

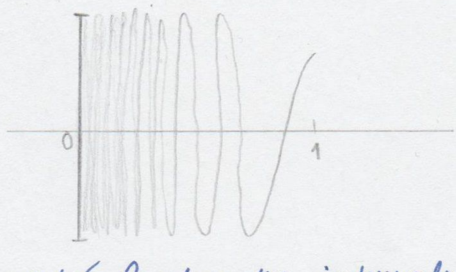
7) ANO, Věta 19.30

8) Vyšetříme speciální případ: Platí, že pokud A je křivkově souvislá, pak $\bar{A}$ je také křivkově souvislá?

Odpověď: NE (tedy v původním příkladu stačí vzít za B příslušnou $\bar{A}$)

Klasickým příkladem takové množiny, která je křivkově souvislá, ale její uzávěr ne, je množina

$$A_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2,\ x \in (0,1],\ y = \sin \tfrac{1}{x}\}.$$



Jejím uzávěrem je množina

$$A = A_1 \cup A_2, \quad \text{kde} \quad A_2 = \{0\} \times [-1,1]$$

Zjevně A_1 je křivkově souvislá. (Je grafem spojité funkce na intervalu.)
Pak je též souvislá (7) a její uzávěr A je také souvislý (6).

Ukážeme, že A není křivkově souvislá (tedy A je příklad množiny, která je souvislá, ale není křivkově souvislá – opak 7 neplatí).

Důkaz (A není křivkově souvislá)

Pro spor předpokládejme, že A je křivkově souvislá.
Potom lze spojit křivkou body $[0,0]$ a $[1, \sin 1]$, jinými slovy, existuje spojité zobrazení $f: [0,1] \to A$ takové, že $f(0) = [1, \sin 1]$ a $f(1) = [0,0]$.

Pozorování: $\forall s,t \in (0,1),\ 0 < s < t < 1:\ f([0,1]) \supseteq \{[\tau, \sin\frac{1}{\tau}];\ s \le \tau \le t\}$

Důkaz: Nechť ne, tedy $\exists s,t \in (0,1),\ 0 < s < t < 1:\ f([0,1]) \not\supseteq \{[\tau, \sin\frac{1}{\tau}];\ s \le \tau \le t\}$.

Tedy $\exists\, \tau^* \in [s,t]$ takové, že $[\tau^*, \sin \frac{1}{\tau^*}] \notin f([0,1])$.

Pak definujeme $H_1 = \{[\tau, \sin\frac{1}{\tau}],\ \tau \in (0,\tau^*)\} \cup A_2$ a $H_2 = \{[\tau, \sin\frac{1}{\tau}],\ \tau \in (\tau^*, 1]\}$

Potom H_1 a H_2 jsou neprázdné, disjunktní a otevřené v (A,ρ).

Tedy $f([0,1])$ není souvislý. Spor.

Definice: Řekneme, že $a \in \mathbb{R}^2$ leží vlevo od bodu $b \in \mathbb{R}^2$ jestliže $a=[a_1,a_2]$, $b=[b_1,b_2]$ a $a_1 < b_1$.

Položme $T = \{\sigma \in (0,1],\ f(\sigma) \in A_2\}$ a $\tau_0 = \inf T$.

Víme, že $1 \in T$, neboť $f(1) = [0,0] \in A_2$ a $\tau_0 > 0$.

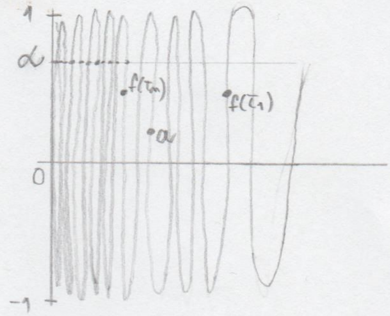
Najdeme posloupnost $\tau_n \nearrow \tau_0$ (monotónně).

Tvrdíme, že pak platí: $f([\tau_1,\tau_0]) \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} f([\tau_1,\tau_n]) \supset \{x \in A_1,\ x \text{ leží vlevo od } f(\tau_1)\}$

↳ První inkluze je zřejmá, neboť $\tau_n \nearrow \tau_0$.

Dokážeme druhou inkluzi: Nechť to neplatí. Pak $\exists\, a \in A_1$, a vlevo od $f(\tau_1)$, ale přitom $a \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} f([\tau_1,\tau_n])$. Protože $\tau_n \nearrow \tau_0$, existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $f(\tau_n)$ je vlevo od a (f je spojité). To je spor s pozorováním (pro $f([\tau_1,\tau_n])$ a první souřadnice $f(\tau_n) < s < t <$ první souřadnice $f(\tau_1)$), které říká, že $a \in f([\tau_1,\tau_n])$.

Závěrečný krok: najdeme $\alpha \in [-1,1]$ takové, že $[0,\alpha] \neq f(\tau_0)$. Najdeme rostoucí posloupnost r_n tak, aby $f(r_n) = [\alpha, z_n] \in A_1$.



Pak $\lim_{n\to\infty} r_n \le \tau_0$ (jinak by $\exists\, m \in \mathbb{N}: f(r_m) \in A_2$)

a $\lim_{n\to\infty} r_n \ge \tau_0$ (díky pozorování, vždy by bylo ještě něco nalevo)

Tedy $r_n \nearrow \tau_0$. Potom ale $f(r_n) \to f(\tau_0)$ (ze spojitosti f)

a zároveň $f(r_n) \to [0,\alpha]$ (konvergence v (A,ρ)).

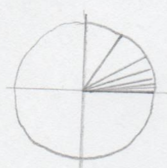
Z věty o jednoznačnosti limity dostáváme spor.

9) NE. Ukážeme na příkladu

$A = \{$úsečka délky 1 s krajním bodem $[0,0] \in \mathbb{R}^2$ a směrnicí $\frac{1}{n}\}$

$\bar{A} = A \cup ([0,1] \times \{0\})$

$B = A \cup ([\frac{1}{2},1] \times \{0\})$



Pak A i $\bar{A}$ jsou křivkově souvislé, ale B není.

10) NE. Ukážeme, že každý souvislý (P,ρ), který má alespoň dva body, je nespočetný.

Důkaz. Nechť $x,y \in P$, $x \neq y$. Označme $R = \rho(x,y) > 0$. Pro spor předpokládejme, že P je spočetný. Pak je spočetná i množina $A = \{r \in (0,R);\ \exists\, z \in P: \rho(x,z) = r\}$. Tedy můžeme zvolit $r_0 \in (0,R) \setminus A$. Položíme $H = B(x,r_0)$. H je otevřená a neprázdná ($x \in H$). Dále $H^c = \{z \in P,\ \rho(x,z) \ge r_0\} = \{z \in P,\ \rho(x,z) > r_0\}$, neboť $r_0 \notin A$. Tedy i H^c je otevřená a neprázdná ($y \in H^c$) a $P = H \cup H^c$, spor se souvislostí.