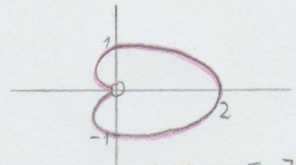
7. cvičení z MA4 - Křivkový a plošný integrál - Area formule (2/2)

("o parametrizacích")

Příklad 3.3 Spočtěte $\mathcal{H}^1$-míru množiny (graf kardioidy)

$$M = \left\{ [x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 = \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 \right\}.$$



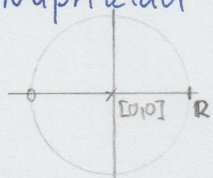
Pozn.: $[0,0] \notin M$

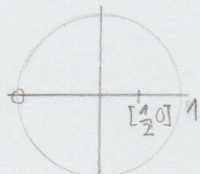
Řešme obecnější úlohu:

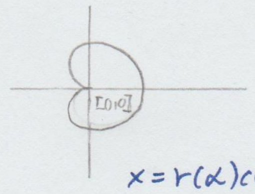
Obecný tvar křivky "jednoduše" obíhající bod $[a,b]$ v polárních souřadnicích je

$$\varphi(\alpha) = \begin{pmatrix} a + r(\alpha)\cos\alpha \\ b + r(\alpha)\sin\alpha \end{pmatrix},\ \alpha \in (-\pi,\pi) = G,\ r(\alpha) > 0$$

Například







$x = r(\alpha)\cos\alpha$

$y = r(\alpha)\sin\alpha$

$x^2+y^2 = R^2$

$r^2(\alpha)\cos^2\alpha + r^2(\alpha)\sin^2\alpha = R^2$

$r^2(\alpha) = R^2 \Rightarrow r(\alpha) = R$

$x = \frac{1}{2} + r(\alpha)\cos\alpha$

$y = r(\alpha)\sin\alpha$

$x^2+y^2 = 1$

$\frac{1}{4} + r(\alpha)\cos\alpha + r^2_{(\alpha)}\cos^2\alpha + r^2_{(\alpha)}\sin^2\alpha = 1$

$r^2(\alpha) + r(\alpha)\cos\alpha - \frac{3}{4} = 0$

řešení kvadratické rce je

$r(\alpha) = \dfrac{-\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha + 3}}{2}$

$x = r(\alpha)\cos\alpha$

$y = r(\alpha)\sin\alpha$

$x^2+y^2 = \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2$

$r^2(\alpha) = \left(1+\frac{r(\alpha)\cos\alpha}{r(\alpha)}\right)^2$

$r(\alpha) = 1+\cos\alpha$

$$\varphi'(\alpha) = \begin{pmatrix} r'(\alpha)\cos\alpha - r(\alpha)\sin\alpha \\ r'(\alpha)\sin\alpha + r(\alpha)\cos\alpha \end{pmatrix},\ \varphi \text{ je prosté regulární}$$

(C^1 a $\operatorname{vol}\varphi' \neq 0$)

$$\operatorname{vol}\varphi'(\alpha) = \sqrt{(r'(\alpha)\cos\alpha - r(\alpha)\sin\alpha)^2 + (r'(\alpha)\sin\alpha + r(\alpha)\cos\alpha)^2} = \sqrt{r'(\alpha)^2 + r^2(\alpha)} \neq 0$$

$$\mathcal{H}^1(\varphi(G)) = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{r'(\alpha)^2 + r^2(\alpha)}\, d\alpha$$, nepokrytý většinou zbyde 1 bod a $\mathcal{H}^1(\text{bod}) = 0$

Zpět k příkladu s kardioidou: $r(\alpha) = 1+\cos\alpha$, $r'(\alpha) = -\sin\alpha$, parametrizace pokrývá celé M ($M = \varphi(G)$). Tedy

$$\mathcal{H}^1(M) = \mathcal{H}^1(\varphi(G)) = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\sin^2\alpha + (1+\cos\alpha)^2}\, d\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\sin^2\alpha + 1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha}\, d\alpha =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2+2\cos\alpha}\, d\alpha = \sqrt{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1+\cos\alpha}\cdot\frac{\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1-\cos\alpha}}\, d\alpha = \sqrt{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin\alpha|}{\sqrt{1-\cos\alpha}}\, d\alpha = 2\sqrt{2}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos\alpha}}\, d\alpha =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = \cos\alpha \\ dt = -\sin\alpha \end{matrix}\ \begin{array}{c|c|c} \alpha & 0 & \pi \\ t & 1 & -1 \end{array} \right| = 2\sqrt{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t}}\, dt = \left| \begin{matrix} s = 1-t \\ ds = -dt \end{matrix}\ \begin{array}{c|c|c} t & -1 & 1 \\ s & 2 & 0 \end{array} \right| = 2\sqrt{2}\int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{s}}\, ds = 2\sqrt{2}\left[2\sqrt{s}\right]_0^2 = 8.$$

Poznámka: dva vzorové příklady na area-formuli byly provedeny na přednášce, považuji se za procvičené (např. sférické souřadnice)

Teoretický podklad

$m \in N$, $m \geq 2$, $u^1, \dots, u^{m-1} \in \mathbb{R}^m$. Platí $\mathrm{vol}(u^1, \dots, u^{m-1}) = \| u^1 \times \dots \times u^{m-1} \|$

Příklad 3.6 Spočtěte obsah části povrchu rotačního hyperboloidu

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3, z = xy, x^2+y^2 \leq 1\}.$$

Řešení:

Opět řešme nejprve obecnější úlohu: (pro ilustraci, jinak lze samozřejmě parametrizovat rovnou)

Je-li $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3, z = f(x,y), [x,y] \in G \text{ otevřené}, f \in C^1(G)\}$, pak lze parametrizovat

$$\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}. \quad \varphi'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\circledast \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = 0 + 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} + 0$$

$$\mathrm{vol}\, \varphi' = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| = \left\| \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, \overset{\circledast}{-}\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) \right\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

, φ je prosté regulární

Zpět k příkladu. Zde $f(x,y) = xy$, $G = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 < 1\}$

Nezakrytá část: $S_1 = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 = 1, z = xy\}$

$$\mathcal{H}^2(\varphi(G)) = \int_{\varphi(G)} 1 \, d\mathcal{H}^2 \overset{AF}{=} \int_G \sqrt{1+y^2+x^2} \, d\lambda^2$$

Dále můžeme použít větu o substituci a sférické souřadnice:

$$G = \{[r\cos\alpha, r\sin\alpha], r \in (0,1), \alpha \in (-\pi, \pi)\} \cup \underbrace{\{[x,0], x \in (-1,0]\}}_{S_2}$$

Označíme $\psi(r,\alpha) = \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix}$, $\psi'(r,\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{pmatrix}$, $|J_{\psi'}| = r$, ψ je prosté regulární.

$$\mathrm{vol}\, \psi' = \sqrt{\det (\psi')^T(\psi')} = \sqrt{\det^2(\psi')} = |\det(\psi')| = |J_{\psi'}|$$

Tedy,

$$\mathcal{H}^2(M) = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1+r^2}\, r \, d\alpha \, dr + \mathcal{H}^2(S_1) + \overset{\lambda^2}{\mathcal{H}^2}(S_2)$$

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1+r^2}\, r \, d\alpha \, dr = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+r^2}\, r \, dr = \begin{bmatrix} t = 1+r^2 & \begin{array}{c|c|c} r & 0 & 1 \\ \hline t & 1 & 2 \end{array} \\ dt = 2r\,dr & \end{bmatrix} = \pi \int_1^2 \sqrt{t} \, dt = \pi \cdot \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$$

Zbývá ukázat, že $\mathcal{H}^2(S_1) = 0$ a $\mathcal{H}^2(S_2) = 0$

- $S_1 = \{[\cos\alpha, \sin\alpha, \cos\alpha\sin\alpha], \alpha \in [-\pi, \pi)\}$ je lipschitzovský obraz intervalu $[-\pi, \pi)$, (neboť $\xi(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha, \cos\alpha\sin\alpha) \in C^1(-2\pi, 2\pi)$), tedy $\mathcal{H}^1(S_1) \overset{\text{věta 20.7b}}{\leq} C_{lip}^1 \mathcal{H}^1([-\pi, \pi)) < \infty$, tedy $\mathcal{H}^2(S_1) \overset{\text{věta 20.7c}}{=} 0$
- S_2 je 1-lipschitzovský obraz intervalu $(-1,0]$, tedy $\mathcal{H}^1(S_2) \leq \mathcal{H}^1((-1,0]) < \infty$, tedy $\mathcal{H}^2(S_2) = 0$.

Závěr

$$\mathcal{H}^2(M) = \frac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right).$$

Příklady na procvičení (3.1 - 3.24)

Příklad 3.9 Spočtěte $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\, d\mathcal{H}^1$, kde C je kružnice se středem $[\frac{1}{2}, 0]$ a poloměrem $\frac{1}{2}$

[Hint: Použijte parametrizaci pomocí obecných polárních souřadnic.]

Příklad 3.19 Spočtěte obsah rovinné plochy $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3, z = ax+by, x^2+y^2 \leq 1\}, a,b>0.$

[Hint: Použijte parametrizaci $\begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$]

Příklad 3.18 Spočtěte $\int_C |y|\, d\mathcal{H}^1$, kde C je Bernouliova lemniskáta zadaná

rovnicí $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ pro nějaké $a>0$

[Hint: Použijte parametrizaci pomocí obecných polárních souřadnic, ale nejprve je vhodné odhadnout, kde se lemniskáta nachází a jestli není nějak pěkně symetrická. (pokud vám budou vycházet záporné hodnoty pod odmocninou, je určitě něco špatně.)]

Příklad 3.16 Spočtěte $\int_C (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})\, d\mathcal{H}^1$, kde $C = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{4}{3}}\}, a>0.$

[Hint: Obecné polární souřadnice tak, jak jsme si je definovali, vedou na šílené počty, ale stačí je modifikovat na $\begin{pmatrix} r(\alpha)\cos^3(\alpha) \\ r(\alpha)\sin^3(\alpha) \end{pmatrix}$]