

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE SE SEPAROVANÝMI PROMĚNNÝMI

1. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice $y' = \sqrt[5]{y^2}$.
2. Pro diferenciální rovnici $y' = \frac{y^2}{x^2}$ nalezněte
 - a) všechna maximální řešení,
 - b) maximální řešení procházející bodem $[1, 1/2]$,
 - c) všechna maximální řešení, která jsou na svém definičním oboru omezená.
3. Pro diferenciální rovnici $y' = -\frac{(1+y^2)x}{1+x^2}$ nalezněte
 - a) všechna maximální řešení,
 - b) maximální řešení procházející bodem $[0, 1]$.
4. Řešte rovnici $y'(2 - e^x) = -3e^x \operatorname{tg} y \cos^2 y$.
Nalezněte všechna maximální řešení rovnice.
5. $y' = y^2$
6. $y' = |y|$
7. $y' = \sqrt{1 - y^2}$
8. $xy' = 1 + y^2$

LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE PRVNÍHO ŘÁDU

Nalezněte všechna maximální řešení následujících rovnic.

9. $y' - \frac{1}{x+1}y = -\frac{1}{100}$
10. $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$
11. $y' + (\operatorname{tg} x)y = \frac{1}{\cos x}$
12. $y' + \frac{x+1}{x}y = 3xe^{-x}$
13. $y' - \frac{2}{2x+1}y = \frac{4x}{2x+1}$
14. $y' + xy = x$
15. $y' - \frac{1}{x}y = x \sin x$
16. $y' - y = xe^x$
17. $y' + \frac{y}{\cos^2 x} = \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}$
18. $y' - y = \sin x$
19. $y' = y + xe^x \sin 2x$
20. $y' + \frac{x+1}{x}y = 1$
21. $(x-1)y' = x^2 - y$
22. $y' + 2y = \cos x$
23. $y' - \frac{2y}{\sin 2x} = \sin x$
24. $xy' - y = x^2$

LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

Nalezněte všechna maximální řešení následujících rovnic.

25. $y'' + 4y' + 4y = 0$
26. $y'' - 3y' + 2y = 0$
27. $y'' - 6y' + 13y = 0$
28. $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$
29. $y'' - y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
30. $y'' + y = 4x \cos x$
31. $7y'' - y' = 14x$
32. $y'' - 2y' + 2y = \cos x$
33. $y''' - y'' - 2y' = e^{2x} + x^3 + 3x^2 + 1$
34. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + x + 1}$

VÝSLEDKY

1.

$$y(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R};$$

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, c] \\ \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}(x-c)\right)^5} & x \in (c, \infty) \end{cases}, \quad c \in \mathbf{R};$$

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}(x-c)\right)^5} & x \in (-\infty, c) \\ 0 & x \in [c, \infty) \end{cases}, \quad c \in \mathbf{R};$$

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}(x-c_1)\right)^5} & x \in (-\infty, c_1) \\ 0 & x \in [c_1, c_2] \\ \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}(x-c_2)\right)^5} & x \in (c_2, \infty) \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}, c_1 < c_2;$$

$$y(x) = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}(x-c)\right)^5}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad c \in \mathbf{R}.$$

2. a) $y(x) = \frac{x}{1-cx}$ na intervalech $(0, 1/c)$, $(1/c, \infty)$, $(-\infty, 0)$ pro $c > 0$, na intervalech $(-\infty, 1/c)$, $(1/c, 0)$, $(0, \infty)$ pro $c < 0$; $(0, \infty)$, $(-\infty, 0)$ pro $c = 0$; $y(x) = 0$ na intervalech $(0, \infty)$, $(-\infty, 0)$.

b) $y(x) = \frac{x}{1+x}$ na intervalu $(0, \infty)$

c) $y(x) = 0$ na intervalech $(0, \infty)$, $(-\infty, 0)$; $y(x) = \frac{x}{1-cx}$ na $(-\infty, 0)$ pro $c > 0$ a $(0, \infty)$ pro $c < 0$.

3. a) $y(x) = \operatorname{tg}\left(-\frac{1}{2} \log(1+x^2) + c\right)$ na intervalech

$$\left(-\sqrt{\exp(\pi+2c)-1}, \sqrt{\exp(\pi+2c)-1}\right) \text{ pro } |c| < \pi/2,$$

$$\left(-\sqrt{\exp(\pi+2c)-1}, -\sqrt{\exp(-\pi+2c)-1}\right) \text{ pro } |c| \geq \pi/2,$$

$$\left(\sqrt{\exp(-\pi+2c)-1}, -\sqrt{\exp(\pi+2c)-1}\right) \text{ pro } |c| \geq \pi/2.$$

b) $y(x) = \operatorname{tg}\left(-\frac{1}{2} \log(1+x^2) + \frac{\pi}{4}\right)$ na intervalu $\left(-\sqrt{\exp(\frac{3}{2}\pi)-1}, \sqrt{\exp(\frac{3}{2}\pi)-1}\right)$.

4. Nejde o rovnici se separovanými proměnnými. Je-li však $x \neq \log 2$, můžeme ji na tento tvar upravit:

$$y' = -\frac{3e^x}{2-e^x} \cdot \operatorname{tg} y \cdot \cos^2 y. \quad (1)$$

Nejprve standardním postupem vyřešíme tuto rovnici.

1. krok. Funkce $h(x) = -3e^x/(2-e^x)$ je spojitá na intervalech $(-\infty, \log 2)$ a $(\log 2, +\infty)$. Budeme tedy řešit rovnici (1) na každém z těchto intervalů.

2. krok. Nulovými body funkce $g(y) = \operatorname{tg} y \cdot \cos^2 y$ jsou body $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Odtud dostáváme stacionární řešení

$$y(x) = k\pi, \quad x \in (-\infty, \log 2), \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$y(x) = k\pi, \quad x \in (\log 2, +\infty), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

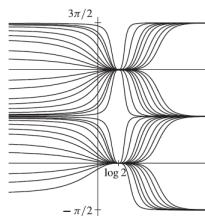
3. krok. Funkce g je spojitá a nenulová na intervalech $(k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2})$ pro $k \in \mathbf{Z}$.

4. krok. Zafixujeme jeden z intervalů z 1. kroku a jeden z intervalů ze 3. kroku. Je-li y řešením rovnice, pak splňuje

$$\frac{y'(x)}{\operatorname{tg} y(x) \cdot \cos^2 y(x)} = -\frac{3e^x}{2-e^x}.$$

Primitivní funkcí k funkci $y \mapsto \frac{1}{\operatorname{tg} y \cdot \cos^2 y}$ je například $G(y) = \log |\operatorname{tg} y|$, primitivní funkcí k pravé straně zase $H(x) = 3 \log |2 - e^x|$. Je-li y řešením, pak existuje konstanta $c \in \mathbf{R}$ taková, že

$$\log |\operatorname{tg} y(x)| = 3 \log |2 - e^x| + c.$$



OBRÁZEK 1

5. krok. Zafixujme c . Všimněme si, že $G\left(k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{R}$ pro libovolné $k \in \mathbf{Z}$, tedy pro x již nedostaneme žádné další omezení. Po úpravě obdržíme

$$|\operatorname{tg} y(x)| = e^c \cdot |2 - e^x|^3.$$

Rozeberme různé případy znamének. Podle toho, zda $x \in (-\infty, \log 2)$, nebo $x \in (\log 2, +\infty)$, je výraz $2 - e^x$ kladný, nebo záporný. Podobně znaménko $\operatorname{tg} y$ závisí na tom, ve kterém z intervalů z 3. kroku pracujeme. Odstraníme-li tedy absolutní hodnoty, mohou se na jednotlivých stranách rovnice objevit znaménka navíc. Když si však uvědomíme, že číslo e^c je libovolná kladná konstanta, je jasné, že ve všech případech bude platit

$$\operatorname{tg} y = a \cdot (2 - e^x)^3,$$

kde a je nějaká nenulová konstanta. Funkce tg zúžená na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ má inverzní funkci $k\pi + \operatorname{arctg}$, a tedy funkce

$$y(x) = k\pi + \operatorname{arctg}(a(2 - e^x)^3)$$

je pro každé $k \in \mathbf{Z}$ a $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ řešením rovnice (1) na intervalu $(-\infty, \log 2)$ a také na intervalu $(\log 2, +\infty)$. Všimněme si ještě, že dosadíme-li $a = 0$, dostaneme stacionární řešení z 2. kroku.

6. krok. Řešení rovnice (1) mezi sebou nelze lepit, jsou totiž definovaná na maximálních možných intervalech. Proto jsou v 5. kroku popsána všechna maximální řešení rovnice (1).

My jsme však měli najít řešení původně zadané rovnice. Na intervalech neobsahujících bod $\log 2$ je tato rovnice ekvivalentní s (1). Bod $\log 2$ jsme vyloučili jen proto, abychom mohli řešit rovnici (1), na niž bylo možné použít standardní postup. Proto je třeba ověřit, zda je řešení rovnice (1) možno slepit v bodě $\log 2$. Uvědomte si, že jde o slepování z jiného důvodu než v 6. kroku řešení rovnice se separovanými proměnnými, a tudíž musíme ověřit nejen shodnost limit řešení, ale i existenci derivace a platnost naší rovnice v bodě $\log 2$.

Snadno zjistíme, že limita řešení z 5. kroku v bodě $\log 2$ zprava eventuálně zleva je $k\pi$, a limita y' je zde 0. Definujme-li tedy

$$y(x) = \begin{cases} k\pi + \operatorname{arctg}(a(2 - e^x)^3) & \text{pro } x \in (-\infty, \log 2), \\ k\pi + \operatorname{arctg}(b(2 - e^x)^3) & \text{pro } x \in (\log 2, +\infty), \end{cases} \quad a, b \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z},$$

pak tato funkce je spojitá na \mathbf{R} a podle věty o výpočtu derivace platí $y'(\log 2) = 0$. Dosazením ověříme, že naše rovnice je splněna i v bodě $\log 2$. Všechna maximální řešení mají tedy uvedený tvar. Některá jsou znázorněna na obrázku.

9. $y(x) = -\frac{1}{100}(x+1) \log|x+1| + a(x+1)$, $x \in (-\infty, -1)$ nebo $x \in (-1, \infty)$ 10. $y(x) = x^4 + cx^2$,
 $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$ 11. $y(x) = \sin x + a \cos x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2) + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
12. $y(x) = x^2 e^{-x} + a e^{-x} \frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $a \in \mathbf{R}$ 13. $y(x) = 1 + 2x \log|2x+1| +$
 $\log|2x+1| + a(2x+1)$, $x \in (-\infty, -1/2)$ nebo $x \in (-1/2, \infty)$ 14. $y(x) = 1 + a e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbf{R}$
15. $y(x) = -x \cos(x) + ax$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$ 16. $y(x) = \frac{1}{2} x^2 e^x + a e^x$, $x \in \mathbf{R}$
17. $y(x) = e^{\operatorname{tg} x} + a e^{-\operatorname{tg} x}$, $x \in (-\pi/2, \pi/2) + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ 18. $y(x) = -\frac{1}{2} \cos(x) - \frac{1}{2} \sin(x) + a e^x$,
 $x \in \mathbf{R}$ 19. $y(x) = -e^x x \cos^2 x + \frac{1}{2} e^x \cos(x) \sin(x) + \frac{1}{2} x e^x + a e^x$, $x \in \mathbf{R}$ 20. $y(x) =$
 $\frac{x-1}{x} + a \frac{1}{x} e^{-x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$ 21. $y(x) = \frac{1}{3} \frac{x^3}{x-1} + a \frac{1}{x-1}$, $x \in (-\infty, 1)$
nebo $x \in (1, \infty)$ 22. $y(x) = \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x + a e^{-2x}$, $x \in \mathbf{R}$ 23. $y(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos x} + a \operatorname{tg} x$,
 $x \in (0, \pi/2) + k\pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$ 24. $y(x) = x^2 + ax$, $x \in \mathbf{R}$ 25. $y(x) = a e^{-2x} + b x e^{-2x}$,

$$\begin{array}{ll}
x \in \mathbf{R} & \mathbf{26.} \ y(x) = ae^x + be^{2x}, \ x \in \mathbf{R} & \mathbf{27.} \ y(x) = ae^{3x} \sin 2x + be^{3x} \cos 2x, \ x \in \mathbf{R} \\
\mathbf{28.} \ y(x) = -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} - \frac{1}{2}x^2e^{-3x} + a + be^{-3x}, \ x \in \mathbf{R} & \mathbf{29.} \ y(x) = -e^x \operatorname{arctg}(e^{-x}) + \\
e^{-x} \operatorname{arctg}(e^x) + ae^x + be^{-x}, \ x \in \mathbf{R} & \mathbf{30.} \ y(x) = x^2 \sin x + x \cos x + a \sin x + b \cos x, \ x \in \mathbf{R} \\
\mathbf{31.} \ y(x) = -7x^2 - 98x + a + be^{x/7}, \ x \in \mathbf{R} & \mathbf{32.} \ y(x) = -\frac{2}{5} \sin x + \frac{1}{5} \cos x + ae^x \sin x + be^x \cos x, \\
x \in \mathbf{R} & \mathbf{33.} \ y(x) = \frac{1}{6}xe^{2x} - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{7}{8}x + a + be^{2x} + ce^{-x}, \ x \in \mathbf{R} & \mathbf{34.} \ y(x) = \\
-\frac{1}{2} \log(x^2 + x + 1)e^x + \frac{1}{\sqrt{3}}e^x \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}xe^x \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + ae^x + bxe^x, \ x \in \mathbf{R}
\end{array}$$