

Písémkové příklady na maticový počet (LS 97/98)

Příklad A: Najděte řešení soustavy rovnic a spočtěte determinant soustavy.

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z + 4t &= 1 \\2x - 2y + 3z - 3t &= -5 \\x + y + z + t &= 5 \\4x + 3y - 5z + 2t &= 3\end{aligned}$$

Příklad B: Určete hodnotu matice A a rozhodněte, zda platí $\det A = 0$;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -10 & -2 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Příklad C: Spočtěte determinant matice A .

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Příklad D: Spočtěte determinant matice A .

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Příklad E: Spočtěte determinant matice A .

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Příklad F: Určete hodnotu matice A v závislosti na parametru:

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Příklad G: Nalezněte matici inverzní k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad H: Určete hodnotu matice A v závislosti na parametru:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Příklad I: Řešte soustavu $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení

Příklad A: Gaussovou eliminací obdržíme řešení $x = -3$, $y = 13$, $z = 2$, $t = -7$.
Spočtáme determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 4 & 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -9 & -2 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 58.$$

Příklad B: Převedme matici A pomocí elementárních řádkových úprav na schodovitou matici:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -10 & -2 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & -8 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -2 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & 4 & -9 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & 36 & 47 \\ 0 & 0 & 8 & -103 & -134 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & -2 & 36 & 47 \\ 0 & 0 & 0 & 63 & 83 \\ 0 & 0 & 0 & 41 & 54 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & -2 & 36 & 47 \\ 0 & 0 & 0 & 63 & 83 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{63} \end{pmatrix}.$$

Matice A má hodnost 5, a je tedy regulární. Proto platí $\det A \neq 0$.

Příklad C: Platí

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 29.$$

Příklad D: Platí

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 32.$$

Příklad E: Platí:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -8 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -16 & -8 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -16.
 \end{aligned}$$

Příklad F: Upravme matici A pomocí řádkových elementárních úprav, které nemění hodnotu matice:

$$\begin{aligned}
 h(A) &= h \begin{pmatrix} x & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \\ x & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= h \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2x & 2+3x \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2x & 2+3x \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Pokud $x \neq 0$, je hodnota matice rovna 3. V případě, že $x = 0$, je hodnota matice A rovna 2.

Příklad G: Standardním postupem obdržíme

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 17 & 4 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \\
 &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \\
 &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 4 & 9 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 12 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & -17 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 11 & 26 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 12 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & -17 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \\
 &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 12 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & -17 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Platí tedy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 12 & 3 & 4 \\ -7 & -17 & -4 & -6 \\ -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Příklad H: Pomocí řádkových elementárních úprav, které nemění hodnotu matice, dostaneme:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & x & x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & x-2 & x-1 \end{pmatrix}.$$

Pokud $x = 2$, pak $h(A) = 3$. V případě, že $x \neq 2$, pak lze číslem $x - 2$ dělit.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & \frac{x-1}{x-2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & \frac{x-1}{x-2} - \frac{6}{5} \end{pmatrix}.$$

Poslední řádek je nulový, právě když $\frac{x-1}{x-2} - \frac{6}{5} = 0$, tj. právě když $x = 7$.

Závěr: $h(A) = 2$ pro $x = 7$, $h(A) = 3$ pro $x \neq 7$.

Příklad I: Napišme si rozšířenou matici $(A|b)$ a provedme Gaussovu eliminaci:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Odtud již snadno spočteme: $x_1 = -2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 1$, $x_4 = -3$.