3. cvičení
Diskrétní náhodné veličiny

1. Studentovi je předložen test s 10 otázkami. Na každou otázku jsou 3 možné odpovědi a vždy je pouze jedna správná. Student odpovědi nezná a volí je náhodně. Označme X počet správných odpovědí.
   (a) Určete rozdělení náhodné veličiny X označující počet správně zodpovězených otázek.
   (b) Určete pravděpodobnost, že student v testu uspěje, tedy odpoví správně alespoň na 6 otázek.
   (c) Určete střední hodnotu a rozptyl X.
2. V peněžence máte dvě papírové padesátikoruny, jednu stokorunovou a jednu dvousetkorunovou bankovku. Zloděj Vám z peněženky náhodně vybere dvě bankovky. Označme jako X náhodnou veličinu, která udává, o kolik peněz jste právě přišli.
   (a) Určete rozdělení X a spočtěte Vaši očekávanou ztrátu.
   (b) Zloděj následně zaplatí 100 Kč za špatné parkování a doma mu manželka zabaví čtyři pětiny z toho, co donese. Označme jako Y veličinu udávající částku, která zlodějovi po tom všem zůstane. Určete rozdělení a očekávanou hodnotu Y.
   (c) Určete rozptyl veličiny Y.
   (d) S jakou pravděpodobností si bude zloděj moci večer v hospodě koupit jedno pivo v ceně 21 korun.
3. Náhodná veličina X nabývá hodnot $1, \dots, 4$ s pravděpodobnostmi uvedenými v tabulce.

i	1	2	3	4
$\mathsf{P}[X = i]$	0,2	0,3	0,3	p

   (a) Určete hodnotu p.
   (b) Spočtěte střední hodnotu, rozptyl a $\mathsf{E}\,X^3$.
   (c) Spočtěte pravděpodobnosti $\mathsf{P}[X \leq 3]$, $\mathsf{P}[X \text{je sudá}]$, $\mathsf{P}[X \leq 3 \,|\, X \text{ je sudá}]$.
4. Veličina X určuje počet příchozích hovorů na policejní stanici za jednu hodinu. Lze předpokládat, že na stanici přijde právě k hovorů s pravděpodobností $\lambda^k e^{-\lambda}/k!$ pro $k = 0, 1, 2, \dots,$ kde $\lambda > 0$.
   (a) Ověřte, že se jedná o pravděpodobností rozdělení. Jak se toto rozdělení nazývá?
   (b) Vypočítejte střední hodnotu a rozptyl počtu příchozích hovorů za jednu hodinu. (Zde je šikovné využít vytvořující funkci).
5. U zkoušky je 30 otázek. Z nich $n_l = 5$ je lehkých, $n_s = 15$ středně těžkých a $n_t = 10$ těžkých. Pravděpodobnosti úspěchu u zkoušky jsou dány následující tabulkou

otázka	známka			
	1	2	3	4
l	0,8	0,2	0	0
s	0,1	0,4	0,4	0,1
t	0	0	0,2	0,8

   Náhodně vybereme jednu otázku. Určete rozdělení náhodné veličiny X udávající, jakou známku jsme dostali.
6. Mějme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, kde $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ a $\mathcal{A} = \big\{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \Omega\big\}$ a $\mathsf{P}\big(\{1, 2\}\big) = \mathsf{P}\big(\{3, 4\}\big) = \frac{1}{2}$. Na tomto prostoru uvažujme reálné funkce X a Y definované následovně: $X(1) = X(2) = 1$, $X(3) = X(4) = 2$, $Y(1) = Y(2) = Y(3) = 1$, $Y(4) = 2$. Rozhodněte, zda jsou tyto funkce náhodnými veličinami.

Opakování z přednášky

Náhodná veličina X je měřitelné zobrazení (funkce) z prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$ do $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

- **Distribuční funkce** je funkce reálné proměnné $x \in \mathbb{R}$ definovaná jako $F(x) = \mathsf{P}(X \leq x)$. Distribuční funkce jednoznačně určuje rozdělení veličiny X!
- **Střední hodnota** veličiny X je definována jako $\mathsf{E}\,X = \int_\Omega X(\omega)\,\mathrm{d}\mathsf{P}(\omega)$. Vyjadřuje „očekávanou hodnotu" veličiny X.
- **Rozptyl** veličiny X je dán jako $\mathsf{Var}\,X = \mathsf{E}\,(X - \mathsf{E}\,X)^2 = \mathsf{E}\,X^2 - (\mathsf{E}\,X)^2$ (jestliže $\mathsf{E}\,X$ a $\mathsf{E}\,X^2$ existují). Rozptyl je vždy **nezáporné** číslo!
- Jestliže $a, b \in \mathbb{R}$ a X je náhodná veličina, pak platí
$$\mathsf{E}\,(a + bX) = a + b\,\mathsf{E}\,X, \quad \mathsf{Var}\,(a + bX) = b^2\,\mathsf{Var}\,X.$$
- **Kvantilová funkce** je definována jako
$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \; F(x) \geq u\} \quad \text{pro} \quad u \in (0,1).$$
Hodnoty kvantilové funkce se nazývají kvantily. Speciálně, $F^{-1}(1/2)$ se nazývá medián.

Diskrétní rozdělení: Nabývá-li náhodná veličina X s kladnou pravděpodobností **nejvýše spočetně** mnoha (tj. konečně nebo spočetně) hodnot $x_1, x_2, \ldots$, říkáme, že má **diskrétní rozdělení**.

- Rozdělení X je charakterizováno pravděpodobnostmi $p_k = \mathsf{P}(X = x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ a platí $\sum_k p_k = 1$.
- **Distribuční funkce** je po částech konstantní, skokovitá se skoky o velikosti p_k v bodech x_k.
- **Střední hodnota** X se spočítá jako
$$\mathsf{E}\,X = \sum_k x_k\,\mathsf{P}(X = x_k) = \sum_k x_k\,p_k \quad \text{(existuje-li)}.$$
Střední hodnota náhodné veličiny $Y = h(X)$ se spočítá jako
$$\mathsf{E}\,Y = \mathsf{E}\,h(X) = \sum_k h(x_k)\,\mathsf{P}(X = x_k) = \sum_k h(x_k)\,p_k \quad \text{(existuje-li)},$$
nebo přímo z rozdělení Y jako $\mathsf{E}\,Y = \sum_k y_k\,\mathsf{P}(Y = y_k)$.
Rozptyl X spočteme tedy jako
$$\mathsf{Var}\,X = \mathsf{E}\,X^2 - \big(\mathsf{E}\,X\big)^2 = \sum_k x_k^2\,\mathsf{P}(X = x_k) - \left(\sum_k x_k\,\mathsf{P}(X = x_k)\right)^2.$$
- Je-li X celočíselná náhodná veličina nabývající hodnot $0, 1, 2, \ldots$ s pravděpodobnostmi $p_0, p_1, p_2, \ldots$, pak definujeme **vytvořující funkci** P jako
$$P(t) = \mathsf{E}\,t^X = \sum_{k=0}^{\infty} t^k\,\mathsf{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k\,p_k.$$
Potom platí
$$\mathsf{E}\,X = P'(1),$$
$$\mathsf{Var}\,X = P''(1) + P'(1) - \big(P'(1)\big)^2,$$
(Případně bereme namísto $P'(1)$ limitu $P'(1-)$ apod).