5. cvičení
Šikmost, špičatost, Čebyševova nerovnost, příklady spojitých a diskrétních rozdělení

1. Házíme šestistěnnou hrací kostkou. X nechť označuje, kolik hodů předcházelo, než padla jednička.
   (a) Určete $\mathsf{P}(X = k)$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ O jaké se jedná rozdělení?
   (b) Určete pravděpodobnost, že k hození jedničky budete potřebovat méně než 7 hodů.
   (c) Určete $\mathsf{E}\,X$ a $\mathsf{Var}\,X$.
   (d) Porovnejte $\mathsf{E}\,\frac{1}{1+X}$ a $\frac{1}{1+\mathsf{E}\,X}$.
   (e) Nechť Y značí počet „neúspěšných“ hodů než padlo n jedniček. Určete $\mathsf{P}(Y = k)$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots$
2. Množství nápoje v půllitrových plechovkách má normální rozdělení se střední hodnotou 5 dl a rozptylem 0,04 dl^2. Určete pravděpodobnost, že množství nápoje v náhodně vybrané plechovce je v intervalu (4,78; 5,19) decilitru.
3. Doba opravy televizoru má rozdělení s hustotou
$$f(x) = \begin{cases} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$
   kde x představuje čas v minutách.
   (a) Určete parametr λ, jestliže víte, že do 60 minut je opraveno 30 % televizorů.
   (b) Určete šikmost a špičatost tohoto rozdělení.
   (c) Spočtěte $\mathsf{E}\,\mathrm{e}^X$.
4. Ověřte, že rozdělení z příkladu 3 je „bez paměti“, tj. platí
$$\mathsf{P}\big(X > x + y \,|\, X > y\big) = \mathsf{P}\big(X > x\big), \quad \text{pro všechna } x, y > 0.$$
5. Náhodná veličina X má rozdělení dané hustotou
$$f(x) = \begin{cases} 2\,x, & x \in (0, 1), \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$
   Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny $Y = 1 + \frac{2}{\sqrt{X}}$.
6. Hodíme tisíckrát šestistěnnou kostkou a X značí součet čísel které padly ve všech hodech. Pomocí Čebyševovy nerovnosti dokažte, že $\mathsf{P}\big[X \in [3200, 3800]\big] \geq 0{,}95$.
7. Rozhodněte, zda může existovat náhodná veličina X taková, že
$$\mathsf{P}\Big[\mathsf{E}\,X - 2\sqrt{\mathsf{Var}\,X} \leq X \leq \mathsf{E}\,X + 2\,\sqrt{\mathsf{Var}\,X}\Big] < \frac{1}{2}.$$
8. Krajta naklade N vajíček, kde N je náhodná veličina s Poissonovým rozdělením $\mathsf{Po}(\lambda)$, tj.
$$\mathsf{P}[N = k] = \frac{\lambda^k\,\mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$
   Pravděpodobnost, že se z vajíčka vylíhne živá krajtička, je $p \in (0,\,1)$ a vylíhnutích živých krajtiček z různých vajíček jsou nezávislé jevy.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že se vylíhne právě k krajtiček?
   (b) Jaký je očekávaný počet vylíhnutých krajtiček?
   (c) Jaké je rozdělení N, jestliže víme, že se vylíhlo k krajtiček?

Opakování z přednášky

Momenty:

- $\mu'_k = \mathsf{E}\, X^k$ se nazývá **k-tý moment** náhodné veličiny X (typicky je k přirozené, ale nemusí to tak nutně být)
- $\mu_k = \mathsf{E}\,(X - \mathsf{E}\,X)^k$ se nazývá **k-tý centrální moment** náhodné veličiny X
- $\mathsf{E}\,|X|^k$ se nazývá **k-tý absolutní moment** náhodné veličiny X

Střední hodnota $\mathsf{E}\,X$ náhodné veličiny X je její první moment. Platí

$$\mathsf{E}\left(a + b\,X + c\,Y\right) = a + b\,\mathsf{E}\,X + c\,\mathsf{E}\,Y.$$

Rozptyl $\mathsf{Var}\,X$ náhodné veličiny X je její druhý centrální moment, tj. $\mathsf{Var}\,X = \mathsf{E}\,(X - \mathsf{E}\,X)^2$. Rozptyl se může také značit σ^2_X nebo σ^2. Platí $\mathsf{Var}\left(a + b\,X\right) = b^2\,\mathsf{Var}\,X$.

Pro nezávislé náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ pak platí: $\mathsf{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathsf{Var}\,(X_i)$

Šikmost γ_3 náhodné veličiny X je definována jako $\gamma_3 = \mu_3/\sigma^3$.

Špičatost γ_4 náhodné veličiny X je definována jako $\gamma_4 = \mu_4/\sigma^4$.

Jensenova nerovnost: Nechť X je náhodná veličina s hodnotami v intervalu $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ (může být nekonečný), tj. $\mathsf{P}[X \in \mathcal{I}] = 1$. Nechť g je [neostře] konvexní funkce na $\mathcal{I}$ taková, že existuje $\mathsf{E}\,g(X)$. Pak

$$\mathsf{E}\,g(X) \geq g(\mathsf{E}\,X)$$

a rovnost nastává právě když $g(x) = a + bx$ nebo X je konstanta.

Markovova nerovnost: Nechť X je náhodná veličina a $r > 0$. Pak pro libovolné $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\big[|X| \geq \varepsilon\big] \leq \frac{\mathsf{E}\,|X|^r}{\varepsilon^r}.$$

Čebyševova nerovnost: Nechť X je náhodná veličina s konečnou střední hodnotou. Pak pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí

$$\mathsf{P}\big[|X - \mathsf{E}\,X| \geq \varepsilon\big] \leq \frac{\mathsf{Var}\,X}{\varepsilon^2}.$$

Při výpočtech momentů se někdy hodí používat tzv. **gama funkci**, která je pro $p > 0$ definovaná jako

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Platí

- $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$. Speciálně, je-li $n \in \mathbb{N}$, pak $\Gamma(n) = (n-1)!$,
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$,
- pro libovolné $a > 0$ platí

$$\int_0^\infty x^{p-1}\,\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(p)}{a^p}.$$