6. cvičení
Náhodné vektory – úvod

1. Uvažujeme výsledné známky z analýzy a z algebry studentů, kteří vystudovali MFF. Pravděpodobnosti jednotlivých kombinací známek jsou uvedeny v následující tabulce.

		Algebra		
		1	2	3
	1	0,15	0,10	0,05
Analýza	2	0,10	0,20	0,05
	3	0,05	0,10	0,20

   Označme X náhodnou veličinu udávající známku z analýzy a Y zámku z algebry.
   (a) Určete marginální rozdělení veličin X a Y. Jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé?
   (b) Spočtěte očekávanou známku z analýzy a rozptyl této veličiny.
   (c) Spočtěte kovarianci X a Y. Jaký je vztah mezi nezávislostí dvou veličin a jejich kovariancí?
   (d) Určete korelační koeficient ρ_{XY}.
   (e) Určete pravděpodobnost, že z analýzy dostanete lepší známku než z algebry.

2. Házíme třikrát mincí. Označme X počet líců v prvních dvou hodech a Y počet rubů v posledních dvou hodech.
   (a) Určete sdružené rozdělení vektoru $(X, Y)^{\mathrm{T}}$.
   (b) Jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé?
   (c) Určete jejich kovarianci X a Y.

3. Chystáte oslavu narozenin ve své oblíbené restauraci a zvete všechny své příbuzné (budete za ně platit). Množství peněz, které všichni Vaši hosté dohromady projí a propijí (v tisíci Kč), jsou náhodné veličiny X a Y. Ze zkušenosti víte, že vektor $(X, Y)^{\mathrm{T}}$ má spojité rozdělení charakterizované sdruženou hustotu

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x+y) & \text{pro } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0 & \text{jinak .} \end{cases}$$

   (a) Určete konstantu $c > 0$ tak, aby f byla hustota.
   (b) Jaké je rozdělení částky, kterou zaplatíte jen za nápoje? Jaké je rozdělení obnosu, který padne jen na jídlo? Jsou tyto dvě veličiny nezávislé?
   (c) Spočtěte kovarianci X a Y.

4. Náhodný vektor (X, Y) má rozdělení s hustotou

$$f(x,y) = \begin{cases} cxye^{-(x^2+y^2)} & \text{pro } x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0 & \text{jinak .} \end{cases}$$

   (a) Určete konstantu c tak, aby f byla hustota.
   (b) Spočtěte marginální hustoty f_X a f_Y veličin X a Y .
   (c) Jsou veličiny X a Y nezávislé?

5. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(-1, 1)$.
   (a) Označme $Y = X^2$. Spočtěte kovarianci veličin X a Y. Jsou X a Y nezávislé?
   (b) Označme $Z = 2X + 1$. Spočtěte koeficient korelace ρ_{XZ}.

Opakování z přednášky

Kovariance a korelace: Nechť $\mathsf{E}X^2 < \infty$, $\mathsf{E}Y^2 < \infty$. Kovariance $\mathsf{Cov}\,(X,Y)$ náhodných veličin X, Y je definována jako

$$\mathsf{Cov}\,(X,Y) = \mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)(Y - \mathsf{E}Y) = \mathsf{E}(XY) - (\mathsf{E}X)(\mathsf{E}Y).$$

Koeficient korelace ρ_{XY} je definován jako

$$\rho_{XY} = \frac{\mathsf{Cov}\,(X,Y)}{\sqrt{\mathsf{Var}\,X}\sqrt{\mathsf{Var}\,Y}},$$

je-li $\mathsf{Var}\,X, \mathsf{Var}\,Y > 0$. Platí vždy $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$.

Marginální rozdělení:

(a) Jestliže má $\mathbf{X} = (X,Y)^T$ spojité rozdělení s hustotou $f(x,y)$, pak marginální hustotu veličiny X spočteme jako

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Podobně pro marginální hustotu f_Y veličiny Y.

(b) Jestliže má $\mathbf{X} = (X,Y)^T$ diskrétní rozdělení a nabývá pouze hodnot $\{(x_i, y_j)\}_{i,j=1}^{\infty}$, pak marginální rozdělení veličiny X spočteme jako

$$\mathsf{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathsf{P}(X = x_i, Y = y_j).$$

Nezávislost:

(a) Jestliže má $\mathbf{X} = (X,Y)^T$ spojité rozdělení s hustotou f, X má marginální hustotu f_X a Y má hustotu f_Y, pak jsou veličiny X, Y nezávislé právě tehdy, když

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \text{ pro s.v. } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(b) Jestliže má $\mathbf{X} = (X,Y)^T$ diskrétní rozdělení a nabývá pouze hodnot $\{(x_i, y_j)\}_{i,j=1}^{\infty}$, pak jsou veličiny X, Y nezávislé právě tehdy, když

$$\mathsf{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathsf{P}(X = x_i)\mathsf{P}(Y = y_j) \quad \text{pro všechna } i, j \in \mathbb{N}.$$