8. cvičení
Náhodné vektory, podmíněné rozdělení

1. Hustota náhodného vektoru $\mathbf{Z} = (X, Y)^\mathsf{T}$ je

$$f(x,y) = \begin{cases} c\,x\,y, & \text{je-li } x > 0, y > 0, x+y < 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

   (a) Určete konstantu c.
   (b) Určete marginální hustotu X a Y. Jsou X a Y nezávislé?
   (c) Určete $\mathsf{P}(X > Y)$.
   (d) Určete $\mathsf{Cov}\,(X, Y)$ a varianční matici $\mathsf{Var}\,(Z)$.
   (e) Určete $\mathsf{E}\left(\frac{1}{XY}\right)$.
   (f) Určete podmíněnou hustotu Y, je-li dáno $X = x$.
   (g) Určete $\mathsf{E}\,[Y \mid X\,]$ a nakreslete si $\mathsf{E}\,[Y \mid X = x\,]$ jako funkci x.
   (h) Ověřte, že $\mathsf{E}\big(\mathsf{E}\,[Y \mid X\,]\big) = \mathsf{E}\,Y$.
   (i) Určete $\mathsf{Var}\,[Y \mid X\,]$.

2. Hustota náhodného vektoru $(X, Y)^\mathsf{T}$ je

$$f(x,y) = \begin{cases} c\,y, & \text{je-li } 1 < x < 2, x > y, y > 0. \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

   (a) Určete konstantu c.
   (b) Určete $\mathsf{E}\,[Y \mid X\,]$ a nakreslete si $\mathsf{E}\,[Y \mid X = x\,]$ jako funkci x.
   (c) Určete $\mathsf{E}\big(Y\,X^3\big)$ a $\mathsf{E}\big[\,YX^3 \,\big|\, X\,\big]$.

3. Hustota náhodného vektoru $\mathbf{Z} = (X, Y)^\mathsf{T}$ je

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x-y) & \text{pro } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ y \le x, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

   Určete $\mathsf{Var}\,(\mathbf{Z})$ a $\mathsf{P}(X + Y < 1)$.

4. Nechť má náhodný vektor $(X,\, Y)^\mathsf{T}$ rozdělení s hustotou

$$f(x,\,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\exp\!\Big(-\dfrac{y}{x}\Big), & 1 \le x \le 2,\ y > 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

   Určete $\mathsf{E}\,[Y \mid X\,]$, $\mathsf{Var}\,[Y \mid X\,]$ a $\mathsf{Var}\,Y$.

5. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny s distribuční funkcí $F(x)$. Najděte distribuční funkci veličin
   (a) $X_* = \min_{i=1,\ldots,n}\{X_i\}$.
   (b) $X^* = \max_{i=1,\ldots,n}\{X_i\}$.
   (c) Nechť jsou navíc $X_1, \ldots, X_n$ spojité s hustotou $f(x)$. Najděte hustotu X_* a X^*.
   (d) Nechť hustota X_i je $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathbb{I}_{x\in(0,\infty)}$ (exponenciální). Určete střední hodnotu X_*.

Opakování z přednášky

Pro jednoduchost zápisu zde budeme uvažovat pouze dvourozměrný vektor $\mathbf{Z} = (X, Y)^\mathsf{T}$. Nechť $f_{XY}(x, y)$ je jeho sdružená hustota. Obecnější znění vět a přesná formulace předpokladů viz přednáška.

Výpočet pravděpodobnosti Pro B borelovskou podmnožinu $\mathbb{R}^2$ platí

$$\mathsf{P}\big(\mathbf{Z} \in B\big) = \mathsf{P}\big((X, Y)^\mathsf{T} \in B\big) = \iint_B f_{XY}(x, y)\, dx\, dy.$$

Výpočet střední hodnoty transformace náhodného vektoru Pro libovolnou měřitelnou funkci $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ platí

$$\mathsf{E}\, h(X, Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} h(x, y) f_{XY}(x, y)\, dx\, dy,$$

pokud integrál na pravé straně existuje.

Podmíněná hustota: Podmíněnou hustotu náhodné veličiny Y pro dané X

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)},$$

kde $f_X(x)$ je marginální hustota X, definujeme jen pro $x \in \mathbb{R} : f_X(x) > 0$.

Podmíněná střední hodnota a rozptyl:

$$\mathsf{E}\,[Y \mid X] = t(X), \text{ kde } \quad t(x) = \mathsf{E}\,[Y \mid X = x] = \int y\, f_{Y|X}(y|x)\, dy,$$
$$\mathsf{Var}\,[Y \mid X] = \mathsf{E}\left[Y^2 \mid X\right] - (\mathsf{E}\,[Y \mid X])^2.$$

Vlastnosti podmíněné střední hodnoty: Nechť $h_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné funkce. Potom platí

1. $\mathsf{E}\,[a \mid X] = a$ pro libovolné $a \in \mathbb{R}$.
2. $\mathsf{E}\,\big(\mathsf{E}\,[Y \mid X]\big) = \mathsf{E}\,Y$.
3. $\mathsf{E}\,[a_1 h_1(X, Y) + a_2 h_2(X, Y) \mid X] = a_1\,\mathsf{E}\,[h_1(X, Y) \mid X] + a_2\,\mathsf{E}\,[h_2(X, Y) \mid X]$ pro libovolné $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.
4. $\mathsf{E}\,[\psi(X) h_1(X, Y) \mid X] = \psi(X)\,\mathsf{E}\,[h_1(X, Y) \mid X]$.

Rozklad nepodmíněného rozptylu:

$$\mathsf{Var}\,(Y) = \mathsf{E}\,\big(\mathsf{Var}\,[Y \mid X]\big) + \mathsf{Var}\,\big(\mathsf{E}\,[Y \mid X]\big).$$