9. cvičení
Transformace náhodných veličin

1. Nechť $X \sim \mathsf{R}(0,1)$. Určete rozdělení $Y = -\dfrac{1}{\theta}\log X$, kde $\theta > 0$.
2. Nechť $X \sim \mathsf{Exp}(1)$. Určete hustotu náh. veličiny $Y = a - b\log X$, kde $b > 0$. (Toto rozdělení se nazývá Gumbelovo).
3. Nechť $X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$, kde $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ jsou parametry. Nechť

$$Y = d + \exp(X)$$

   (a) Určete hustotu náhodné veličiny Y.
   (b) Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny Y.
4. Nechť $X \sim \mathsf{R}(-\pi/2, \pi/2)$. Najděte distribuční funkci a hustotu veličiny $Y = \sin(X)$. Určete střední hodnotu a medián Y.
5. Nechť X má beta rozdělení $\mathsf{B}(a, b)$, kde $a > 0$, $b > 0$ jsou parametry. To jest, X má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,\, b)}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

   Nechť
$$Y = \log\Big(\frac{X}{1-X}\Big).$$
   Určete hustotu náhodné veličiny Y.
6. Nechť $X \sim \mathsf{N}(0,\, 1)$. Určete distribuční funkci a hustotu náhodné veličiny $Y = |X|$.
7. Nechť $X \sim \mathsf{R}(-1,\, 2)$. Nechť
$$Y = X^2.$$
   Určete hustotu náhodné veličiny Y.
8. Nechť náhodná veličina X má rozdělení popsané předpisem

$$\mathsf{P}(X = k\pi/4) = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

   Jaké rozdělení má náhodná veličina $Y = \cos(X)$?
9. Nechť $X \sim \mathsf{Po}(\lambda_1)$ a $Y \sim \mathsf{Po}(\lambda_2)$ jsou nezávislé. Určete rozdělení $Z = X + Y$.
10. X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny s rozděleními

$$\mathsf{P}(X = n) = (1-p_1)^n\, p_1, \quad n = 0, 1, \ldots,$$
$$\mathsf{P}(Y = n) = (1-p_2)^n\, p_2, \quad n = 0, 1, \ldots$$

   Najděte rozdělení náhodné veličiny $Z = X + Y$.

Opakování z přednášky

Rozdělení funkce spojité náhodné veličiny Nechť X je náhodná veličina s distribuční funkcí F_X a nosičem S_X. Chceme vypočítat rozdělení náhodné veličiny $Y = t(X)$, kde t je borelovsky měřitelná funkce.

Označme F_Y distribuční funkci náhodné veličiny Y. Potom

$$F_Y(y) = \mathsf{P}(Y \leq y) = \mathsf{P}\big(t(X) \leq y\big) = \mathsf{P}\big(X \in \{x : t(x) \leq y\}\big). \tag{1}$$

Hustotu f_Y veličiny Y dostaneme jako derivaci distribuční funkce F_Y, tj. $f_Y(y) = F_Y'(y)$.

Nechť t je ryze rostoucí (resp. klesající) na S_X a τ je funkce inverzní k t na $t(S_X)$. Potom můžeme pro $y \in t(S_X)$ upravit (1) na tvar

$$F_Y(y) = \mathsf{P}\big(X \leq \tau(y)\big) = F_X\big(\tau(y)\big), \tag{2}$$

$$\text{resp. } F_Y(y) = \mathsf{P}\big(X \geq \tau(y)\big) = 1 - F_X\big(\tau(y)\big). \tag{3}$$

Všimněte si, že se stačí explicitně zabývat pouze případem $y \in t(S_X)$, protože v opačném je $F_Y(y)$ buď nula nebo jednička.

Pokud má navíc X spojité rozdělení s hustotou f_X a t má všude nenulovou derivaci, potom derivováním pravé strany rovnosti (2) (resp. (3)) dostáváme

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(\tau(y))\,|\tau'(y)|, & y \in t(S_X), \\ 0, & y \notin t(S_X). \end{cases} \tag{4}$$

Nemonotonní transformace Nechť existují množiny $G_k \subseteq S_X$, $k = 1, 2, \ldots$, takové, že $\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = S_X$, $G_i \cap G_j = \emptyset$ pro $i \neq j$, a t je ryze monotonní na každém G_k.

- Označme $\mathcal{K}^+$ množinu všech indexů k takových, že t roste na G_k a $\mathcal{K}^-$ množinu všech indexů k takových, že t klesá na G_k.
- Označme t_k funkci t restriktovanou na G_k, třeba $t_k(x) = t(x)\mathbb{I}_{G_k}(x)$. Pak pro $y \in t_k(G_k)$ existuje inverze funkce ke t_k, kterou si označíme τ_k.
- Označme $X_k = X\,\mathbb{I}_{G_k}(X)$, $Y_k = t_k(X_k)$. Máme $X = \sum_{k=1}^{\infty} X_k$ a $Y = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k$.

Za daných předpokladů platí

$$F_Y(y) = \sum_{k \in \mathcal{K}^+} \mathsf{P}\big(X_k \leq \tau_k(y), X \in G_k\big) + \sum_{k \in \mathcal{K}^-} \mathsf{P}\big(X_k \geq \tau_k(y), X \in G_k\big).$$

Nechť má navíc X hustotu vzhledem k Lebesgueově míře a nechť je každá τ_k diferencovatelná (skoro všude) v G_k. Pak Y má hustotu

$$f_Y(y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_X(\tau_k(y))\,\big|\tau_k'(y)\big|\,\mathbb{I}_{t_k(G_k)}(y).$$

Rozdělení součtu diskrétních náhodných veličin. Jestliže X, Y jsou náhodné veličiny, které nabývají pouze nezáporných celočíselných hodnot, potom pro rozdělení náhodné veličiny $Z = X + Y$ platí

$$\mathsf{P}(Z = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathsf{P}(X = k, Y = n - k).$$

Jsou-li X, Y navíc **nezávislé**, pak platí

$$\mathsf{P}(Z = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathsf{P}(X = k)\,\mathsf{P}(Y = n - k).$$