10. cvičení
Transformace náhodných vektorů I.

1. Nechť $X \sim \mathrm{R}(0,1)$ a $Y \sim \mathrm{R}(0,1)$ jsou nezávislé.
   (a) Spočítejte hustotu náhodné veličiny $W = X - Y$.
   (b) Spočítejte hustotu náhodné veličiny $Z = X + Y$.
2. Najděte rozdělení hustotu součtu náhodných veličin X a Y, jestliže tyto jsou nezávislé a $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $Y \sim \mathrm{R}(0,\theta)$, Určete střední hodnotu a rozptyl $X + Y$.
3. Nechť $X \sim \mathsf{N}(0,1)$ a $Y \sim \mathsf{N}(0,1)$ jsou nezávislé. Určete rozdělení $Z = X/Y$.
4. Konvoluce gama rozdělení:
   (a) Nechť $X \sim \Gamma(a,p_1)$ a $Y \sim \Gamma(a,p_2)$ jsou nezávislé. Určete rozdělení $Z = X + Y$. [Použijte vlastnosti funkcí beta a gama.]
   (b) Jsou-li $X_1,\dots,X_n$ nezávislé a $X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda_i)$, jaké rozdělení má $Z = \sum_{i=1}^n X_i$? [Použijte výsledek bodu (i).]
   (c) Jsou-li $X_1,\dots,X_n$ nezávislé a $X_i \sim \chi^2_{m_i}$, jaké rozdělení má $Z = \sum_{i=1}^n X_i$? [Použijte výsledek bodu (i).]
5. Nechť $X \sim \mathsf{N}(0,\sigma_1^2)$ a $Y \sim \mathsf{N}(0,\sigma_2^2)$ jsou nezávislé. Dokažte, že $Z = X + Y$ má normální rozdělení. Jaké jsou jeho parametry?
   [Poznámka navíc: Odtud lze dokázat, že má-li $\mathbf{Z}$ m-rozměrné normální rozdělení, pak $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{Z}$ má normální rozdělení pro libovolné $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$.]
6. Nechť X a Y mají sdruženou distribuční funkci
   $$F(x,y) = \frac{1}{2}xy(x+y) \qquad \text{pro } 0 < x < 1 \text{ a } 0 < y < 1.$$
   Spočítejte hustotu a medián náhodné veličiny $\sqrt{X} - \sqrt{Y}$.
7. Nechť U_1 a U_2 jsou nezávislé náhodné veličiny s rozdělením $\mathrm{R}(0,1)$. Definujte
   $$Z_1 = \sqrt{-2\log U_1}\sin(2\pi U_2)$$
   $$Z_2 = \sqrt{-2\log U_1}\cos(2\pi U_2).$$
   Dokažte, že Z_1 a Z_2 jsou nezávislé náhodné veličiny s normovaným normálním rozdělením.

Opakování z přednášky

Transformace náhodného vektoru (prostá) Uvažujme náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\mathsf{T}$ s nosičem rozdělení $S_\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ a spojitým rozdělením (má hustotu vzhledem k Lebesgueově míře). Nechť je dána transformace $\mathbf{t} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tj. $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)^\mathsf{T}$, kde každá t_i zobrazuje $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$.

Zajímá nás rozdělení náhodného vektoru $\mathbf{Y} = \mathbf{t}(\mathbf{X})$. Budeme předpokládat, že transformace $\mathbf{t}$ je diferencovatelná skoro všude v $S_\mathbf{X}$, tj. existuje matice

$$\frac{\partial \mathbf{t}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial t_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial t_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial t_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial t_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Determinant této matice (jakobián transformace $\mathbf{t}$) budeme značit $D_\mathbf{t}(\mathbf{x})$.

Nechť $\mathbf{X}$ má hustotu $f_\mathbf{X}(\mathbf{x})$ vzhledem k Lebesgueově míře. Nechť $\mathbf{t}$ je prosté zobrazení se spojitými prvními parciálními derivacemi na $S_\mathbf{X}$ a $D_\mathbf{t}(\mathbf{x}) \neq 0$ pro skoro všechna $x \in S_\mathbf{X}$. Nechť $\boldsymbol{\tau}$ je inverzní funkce k $\mathbf{t}$ a $D_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x})$ je jakobián $\boldsymbol{\tau}$. Pak $\mathbf{Y} = \mathbf{t}(\mathbf{X})$ má hustotu

$$f_\mathbf{Y}(\mathbf{y}) = f_\mathbf{X}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{y}))\,|D_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y})|\,\mathbb{I}\big\{\mathbf{y} \in \mathbf{t}(S_\mathbf{X})\big\}$$

vzhledem k Lebesgueově míře.

Konvoluce. Speciálně, jsou-li X, Y **nezávislé** náhodné veličiny se spojitým rozdělením s hustotami f_X, f_Y, pak má veličina $Z = X + Y$ rozdělení s hustotou

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x)\,\mathrm{d}x.$$