

12. cvičení

Opakování a doplňky

1. Nechť X je náhodná veličina se spojitou rostoucí distribuční funkcí F_X . Spočítejte distribuční funkci náhodné veličiny $Y = F_X(X)$. O jaké rozdělení se jedná?
2. Hustota náhodného vektoru $(X, Y, Z)^T$ je

$$f(x, y, z) = \begin{cases} cx^3y^2z & \text{pro } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq xy, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Najděte konstantu c a hustotu podvektoru (X, Y) . Rozhodněte o nezávislosti X, Y, Z .

3. Náhodná veličina T má exponenciální rozdělení s intenzitou λ . Podmíněné rozdělení veličiny N za podmínky $T = t$ je Poissonovo s parametrem t , tedy

$$P(N = k | T = t) = \frac{t^k}{k!} e^{-t}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Najděte rozdělení veličiny N .

4. X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s tímž parametrem λ .

- (a) Určete střední hodnoty $E(X + Y)$ a $E(X/(X + Y))$.
- (b) Dokažte, že náhodné veličiny $X + Y$ a $X/(X + Y)$ jsou nezávislé.
- (c) Spočítejte $E(X|X + Y)$.
- (d) Spočítejte $E \min(X, Y)$.

5. Nechť má náhodná veličina X normální rozdělení $N(1, 4)$.

- (a) Pomocí tabulek určete $P(X < 1)$, $P(X > 5)$ a $P(|X| < 2)$.
- (b) Určete nejmenší u , pro které X leží v intervalu $(1 - u, 1 + u)$ s pravděpodobností alespoň 0,95.

6. Nechť $X_1, X_2, \dots$ jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$.

- (a) Jaké je rozdělení $\bar{X}_n$?
- (b) Jaká je pravděpodobnost, že průměr $\bar{X}_n$ bude menší než střední hodnota μ ?
- (c) Nechť $\mu = 1$ a $\sigma^2 = 4$. Jak velké n je třeba zvolit, abychom měli zaručeno, že průměr $\bar{X}_n$ bude kladné číslo s pravděpodobností alespoň 0,99?

7. Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s normovaným normálním rozdělením $N(0, 1)$. Označme $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i^2$. Spočítejte střední hodnotu $E Z_n$ a rozptyl $\text{Var}(Z_n)$. Jak se nazývá rozdělení veličiny Z_n ? (Znáte z přednášky.)

Návod: Pro výpočet rozptylu využijte toho, že $E X^4 = 3$ pro $X \sim N(0, 1)$.

Normální rozdělení. Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ má hustotu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

kde $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 > 0$ jsou parametry. Je-li $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$, tj. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-x^2/2\}$, pak se toto rozdělení nazývá standardizované (normované) normální rozdělení a značí se $N(0, 1)$.

- Distribuční funkce rozdělení $N(0, 1)$ se značí jako Φ , tj. $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-t^2/2\} dt$. Tento určitý integrál je možné spočítat jen numericky, a proto hodnoty funkce Φ nalezneme v tabulkách. Ze symetrie platí

$$\Phi(x) + \Phi(-x) = 1, \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Pro obecné $N(\mu, \sigma^2)$ se potom distribuční funkce $F(x)$ spočte jako $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

- Je-li $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, pak $E X = \mu$ a $\text{Var } X = \sigma^2$.
- Je-li $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ a $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, pak $aX + b$ má normální rozdělení $N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.
- Jsou-li X, Y nezávislé normálně rozdělené a $a, b \in \mathbb{R}$, pak $aX + bY$ má normální rozdělení (s příslušnými parametry).
- Má-li $(X, Y)'$ sdružené dvourozměrné normální rozdělení, pak má $aX + bY$ normální rozdělení (s příslušnými parametry).

Tabulka hodnot distribuční funkce pro normované normální rozdělení:

x	0.000	0.500	1.000	1.500	2.000	2.500
$\Phi(x)$	0.500	0.691	0.841	0.933	0.977	0.994

Tabulka hodnot kvantilové funkce pro normované normální rozdělení:

u	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999
$\Phi^{-1}(u)$	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090