# Příklady na procvičení z `NMFM202`

Naposledy změněno: 24. října 2013

## 1 Klasická pravděpodobnost

**1.** Z kartiček s čísly $1, 2, 3, 4, 5$ náhodně vybereme tři a položíme je v pořadí, v němž jsme je vybrali. Jaká je pravděpodobnost, že vzniklé trojciferné číslo je sudé?

**2.** Ve sportce se sází 6 čísel, losuje se 6 ze 49. Spočtěte pravděpodobnost, že právě 4 čísla vsadíme správně.

**3.** Skupina 10 studentů, z nichž 3 jsou z MFF, se náhodně seřadí do fronty. Určete pravděpodobnost, že 3 studenti z MFF budou vedle sebe.

**4.** Uvažujme $n$ různých dopisů a $n$ různých obálek (již s nadepsanou adresou). Zmatená sekretářka umístí dopisy do obálek zcela náhodně.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že je alespoň jeden dopis ve správné obálce?

(b) S jakou pravděpodobností není žádný dopis ve správné obálce? Spočtěte limitu této pravděpodobnosti pro $n \to \infty$.

**5.** Mějme skupinu $n$ osob ($n > 5$) o kterých můžeme předpokládat, že se narodili nezávisle na sobě. Spočítejte pravděpodobnost, že

(a) žádný z nich se nenarodil ve středu;

(b) právě dva se narodili v pondělí a právě tři v sobotu;

(c) existuje den v týdnu, ve kterém se nikdo z nich nenarodil.

## 2 Nezávislost, podmíněná pravděpodobnost, úplná pravděpodobnost, Bayesův vzorec

**6.** Třikrát po sobě hodíme mincí a zaznamenáme výsledek. Označme rub jako $R$ a líc jako $L$. Rozhodněte, zda jsou jevy $A = \{RRR, LRR, RLL, LLL\}$, $B = \{RRL, RLR, LLR, LLL\}$ a $C = \{RRL, RLR, LRL, LLL\}$ nezávislé.

**7.** Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení. Své rozhodnutí vždy řádně zdůvodněte (uveďte důkaz nebo protipříklad).

(a) Jestliže jsou jevy $A, B$ nezávislé, pak o nezávislosti jevů $A^C, B^C$ obecně neumíme rozhodnout.

(b) Jestliže $\mathsf{P}(A|B) \geq \mathsf{P}(A) > 0$, pak $\mathsf{P}(B|A) \geq \mathsf{P}(B)$.

(c) Existují $A, B$ neslučitelné jevy, tj. $A \cap B = \emptyset$, takové, že $\mathsf{P}(A) \neq 0$, $\mathsf{P}(B) \neq 0$ a $A, B$ jsou nezávislé.

(d) Jestliže platí $\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A|B^C)$, pak jsou jevy A, B nezávislé.

(e) Jestliže $\mathsf{P}(B) > 0$, pak $\mathsf{P}(A|B) \geq \mathsf{P}(A)$.

**8.** Roztržitý profesor zapomene v obchodě deštník s pravděpodobností $1/4$. Cestou ze školy navštívil čtyři obchody a domů přišel bez deštníku. Jaká je pravděpodobnost, že deštník zapomněl ve čtvrtém obchodě?

**9.** Tři skupiny studentů řeší obtížný příklad. Ve skupině A jsou 3 velmi chytří studenti a každý z nich vyřeší příklad s pravděpodobností 0.8. Ve skupině B jsou 4 průměrní studenti a každý z nich vyřeší příklad s pravděpodobností 0.6. Ve skupině C jsou 2 slabí studenti a každý z nich vyřeší příklad s pravděpodobností pouze 0.4.

(a) S jakou pravděpodobností náhodně vybraný student vyřeší příklad?

(b) Náhodně vybraný student příklad nevyřešil. Ze které skupiny nejpravděpodobněji byl?

(c) Studenti pracují nezávisle. S jakou pravděpodobností bude příklad vyřešen alespoň jedním studentem?

**10.** V krabici je 15 tenisových míčků, z toho 9 úplně nových. Pro první hru si náhodně vybereme 3 míčky a po skončení hry je vrátíme zpátky. Pro druhou hru vybereme opět 3 míčky. Určete pravděpodobnost toho, jsou že všechny 3 míčky použité v druhé hře nové.

**11.** Slovo „humor“ se v americké angličtině píše jako HUMOR a v britské angličtině jako HUMOUR. Na zahradní slavnosti byly 2/3 Američanů a 1/3 Britů. Náhodně vybraný člověk napsal slovo „humor“ (svým způsobem) a z tohoto slova bylo náhodně vybráno jedno písmeno. S jakou pravděpodobností byl daný člověk Brit, jestliže bylo vybráno písmeno "U"?

**12.** V truhle je neznámý počet mincí: jedna zlatá mince a náhodný počet stříbrných mincí, přičemž stříbrných mincí je právě $k$ s pravděpodobností $\frac{e^{-1}}{k!}$ pro $k = 0, 1, \ldots$. Náhodně vylosujeme jednu minci a ta je zlatá. Jaké je pravděpodobnost, že v truhle bylo právě $k$ stříbrných mincí za této dodatečné informace?

**13.** Ve sbírce 50 obrazů je 5 padělků. Jestliže je obraz falešný, znalec to pozná s pravděpodobností 80%. Je-li obraz originál, znalec ho mylně posoudí s pravděpodobností 5%. Určete

(a) pravděpodobnost, že obraz je originál, jestliže byl znalcem označen za originál,

(b) pravděpodobnost, že obraz je padělaný, jestliže byl znalcem označen za padělek.

**14.** Každý lékařský test je charakterizován svojí senzitivitou a specificitou, kde

- senzitivita = pravděpodobnost pozitivního výsledku, je-li testovaná osoba nemocná,
- specificita = pravděpodobnost negativního výsledku, je-li testovaná osoba zdravá.

Pro test zjišťující přítomnost HIV viru v těle se uvádí senzitivita 99.9% a specificita 99.7%. Uvažujme hypotetickou populaci, ve které se vyskytuje 1% lidí s virem HIV.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že je osoba s pozitivním výsledkem testu skutečně HIV pozitivní?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že je osoba ve skutečnosti HIV pozitivní, dává-li test negativní výsledek?

(c) U pozitivně testovaných jedinců se test provádí ještě jednou. Jaká je pravděpodobnost, že je člověk skutečně HIV pozitivní, byl-li i druhým testem označen za HIV pozitivního?

**15.** Na stole jsou dvě kostky – růžová a bledě zelená. Růžová kostka je pravidelná devítistěnná kostka, bledě zelená je pravidelná dvanáctistěnná kostka.

(a) Náhodně vybereme kostku a hodíme. Jaká je pravděpodobnost, že padne šestka? Jaká je pravděpodobnost, že padne jedenáctka?

(b) Padla jednička, jaká je pravděpodobnost, že jsme házeli růžovou kostkou?

(c) Nyní předpokládejme, že děvčatům se více líbí růžová kostka, a tak si ji vyberou s pravděpodobností 4/5. Naopak, chlapci si vyberou bledě zelenou kostku s pravděpodobností 2/3.

  - Jaká je pravděpodobnost, že padne šestka, házel-li chlapec?

- Jaký je pravděpodobnost, že padne šestka, házela-li dívka?
- Jaká je pravděpodobnost, že padne šestka, házel-li náhodný student ze třídy, ve které je 10 chlapců a 5 dívek?

## 3 Náhodná veličina – diskrétní rozdělení

**16.** Diskrétní náhodná veličina $X$ nabývá pouze hodnot $1, 2, 3$ s pravděpodobnostmi $\mathsf{P}(X = k) = c \cdot k^2 \quad k = 1, 2, 3$. Spočítejte konstantu $c$, střední hodnotu $\mathsf{E}\,X$ a rozptyl $\mathsf{var}\,X$, distribuční funkci $F$ a pravděpodobnost $\mathsf{P}(X \geq 2)$. Určete dále rozdělení veličiny $Y = (X - 2)^2$ a $\mathsf{E}\,Y$.

**17.** Náhodná veličina $X$ nabývá pouze hodnot $-1, 0, 1, 2$, a to s pravděpodobnosti $\mathsf{P}(X = -1) = \frac{1}{6}$, $\mathsf{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$, $\mathsf{P}(X = 1) = \frac{1}{12}$ a $\mathsf{P}(X = 2) = a$. Určete konstantu $a$, tak aby se jednalo o pravděpodobnostní rozdělení. Spočítejte střední hodnotu $\mathsf{E}\,X$ a rozptyl $\mathsf{var}\,X$. Určete rozdělení veličiny $Y = X^2$ a spočítejte $\mathsf{E}\,Y$.

**18.** Basketbalista hází na koš, jeho pokusy jsou nezávislé a v každém z nich se trefí s pravděpodobností $p \in (0, 1)$. Rozhodl se, že skončí teprve až vhodí $k$ košů. Označme $X$ počet neúspěšných hodů předcházejících $k$-tému úspěchu ($k$-tému vhozenému koši). Určete rozdělení náhodné veličiny $X$.

**19.** Na stole leží $N$ kostek, kde $N$ je náhodná veličina s rozdělením $\mathsf{P}(N = i) = 1/6$, $i = 1, \ldots, 6$.
(a) Spočtěte střední hodnotu a rozptyl veličiny $N$.
(b) Určete rozdělení $N$ za podmínky, že součet čísel na všech kostkách dohromady je roven 5.
(c) Určete rozdělení $N$ za podmínky, že na kostkách padly právě 4 šestky.

**20.** Adam a Bedřich hrají následující hru. Každý hodí jednou (pravidelnou šestistěnnou) kostkou. Pokud je na obou kostkách součet pět, tak vyhrává Adam. Pokud je součet sedm, tak vyhrává Bedřich. Pokud není součet ani pět ani sedm, tak toto kolo skončilo nerozhodně a oba dva házejí znovu.
(a) Určete pravděpodobnost, že Adam vyhraje v $k$-tém kole.
(b) Určete pravděpodobnost, že Adam vyhraje.
(c) Určete střední hodnotu počtu odehraných kol.

**21.** Karel, Franta a Cyril postupně hází kostkou v pořadí K $\rightarrow$ F $\rightarrow$ C. Komu první padne šestka, ten vyhrává, a hra v takovém případě končí.
(a) Určete pravděpodobnost, s jakou Cyril vyhraje v $k$-tém kole.
(b) Určete pravděpodobnost, že Franta hodil kostkou právě $k$-krát.
(c) Určete, s jakou pravděpodobností vyhraje Karel (resp. Franta, Cyril).
(d) Jaký je očekávaný počet Cyrilových hodů kostkou?

**22.** Předpokládejme, že počet aut, která projedou mezi 7. a 8. hodinou pracovního dne pražskou ulicí 5. května se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda > 0$. Předpokládejme dále, že $p\,100$ % ($0 < p < 1$) řidičů překročí na měřeném úseku povolenou rychlost 50 km/h. Určete, jakým rozdělením se řídí počet přestupků zaznamenaných měřičem rychlosti na pražské ulici 5. května mezi 7. a 8. hodinou pracovního dne.

## 4 Náhodná veličina – spojité rozdělení

**23.** Náhodná veličina $X$ má rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} c\,e^x & \text{pro } x \in [0,1], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete konstantu $c$, distribuční funkci $F(x)$, kvantilovou funkci $F^{-1}(u)$, střední hodnotu $\mathsf{E}\,X$ a rozptyl $\mathsf{var}\,(X)$.

**24.** Nechť $k > 1$ a uvažujme rozdělení s hustotou $f(x) = c/|x|$ pro $k < |x| < k+1$ a $f(x) = 0$ jinak. Spočtěte konstantu $c > 0$, $\mathsf{E}\,X$, $\mathsf{var}\,(X)$ a medián $X$.

**25.** Náhodná veličina $X$ má distribuční funkci $F_X$.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= 1 - \tfrac{1}{x^2}, \ x \geq 1, \\ &= 0, \qquad \text{jinak} \end{aligned}$$

Určete hustotu $f$ a kvantilovou funkci $F_X^{-1}(u)$.

**26.** Náhodná veličina $X$ má rozdělení s hustotou $f(x) = 3x^2$ pro $0 < x < 1$ a $f(x) = 0$ jinak. Určete střední hodnotu a rozptyl veličiny $Z = \frac{1}{X}$.

**27.** Náhodná veličina $X$ má rozdělení dané hustotou

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \ln x, & x \in (1, \mathrm{e}), \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete konstantu $a$, distribuční funkci náhodné veličiny $X$ a její střední hodnotu.

**28.** Mějme 100 studentů jejichž věk se dá považovat za nezávislé náhodné veličiny, z nichž každá má střední hodnotou 22 a směrodatnou odchylkou 6 let. Dokažte, že pravděpodobnost, že jejich průměrný věk leží v intervalu od 20 do 24 let je alespoň 0,9.

**29.** Náhodná veličina $X$ má rozdělení dané hustotou

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \big(0,1\big), \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Určete šikmost a špičatost $X$.

(b) Určete absolutní třetí centrální moment, tj. $\mathsf{E}\,|X - \mathsf{E}\,X|^3$.

(c) Rozhodněte, zda platí $\mathsf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{X}}\right) < \frac{1}{\sqrt{\mathsf{E}\,X}}$

**30.** Veličina $X$ má rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot \sin x & \text{pro } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Určete konstantu $c > 0$ a distribuční funkci $F$ (načrtněte).

(b) Spočítejte střední hodnotu $\mathsf{E}\,X$.

(c) Vyjádřete kvantilovou funkci $F^{-1}$ a určete medián.

(d) Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny $Y = 1 - \cos(X)$.

## 5 Náhodné vektory

**31.** Máme modrou a zelenou pravidelnou šestistěnnou kostku. Na každé z kostek je každé z čísel $1, 2, 3$ právě dvakrát. Oběma kostkami hodíme zároveň. Označme $X$ celkový součet na obou kostkách a $Y$ rozdíl mezi číslem padlým na modré kostce a na zelené kostce.

(a) Určete sdružené rozdělení vektoru $(X, Y)$.

(b) Určete marginální rozdělení $X$ a $Y$. Jsou náhodné veličiny $X$ a $Y$ nezávislé?

(c) Určete kovarianci $X$ a $Y$.

**32.** Náhodný vektor $(X,\, Y)'$ má rovnoměrné rozdělení na jednotkovém kruhu, tj. jeho hustota je dána jako $f(x, y) = c$ pro $x^2 + y^2 \leq 1$ a $f(x, y) = 0$ jinak. Určete konstantu $c$ a marginální rozdělení veličin $X$ a $Y$. Rozhodněte, zda jsou veličiny $X$ a $Y$ nezávislé.

**33.** Nechť $(X, Y)'$ je náhodný vektor s hustotou $f(x, y) = c(x^2 + y^2)$ pro $0 < x < 1,\ 0 < y < 1$ a $f(x, y) = 0$ jinak.

(a) Určete konstantu $c$.

(b) Jsou veličiny $X$ a $Y$ nezávislé?

(c) Spočtěte $\mathsf{cov}\,(X, Y)$.

(d) Spočtěte $\mathsf{P}\,(X > Y)$.

(e) Spočtěte $\mathsf{E}\,\left(\frac{1}{X^2+Y^2}\right)$.

**34.** Náhodná veličina $X$ má hustotu $f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$ pro $x \in \mathbb{R}$.

(a) Označme $Y = X^2$. Spočtěte kovarianci veličin $X$ a $Y$. Jsou $X$ a $Y$ nezávislé?

(b) Označme $Z = 54 - 5{,}2\,X$. Spočtěte koeficient korelace $\rho_{XZ}$.

**35.** Hustota náhodného vektoru $\mathbf{Z} = (X, Y)^{\mathsf{T}}$ je

$$f(x, y) = \begin{cases} c\,x\,y & \text{pro } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2,\ y \leq 2\,x, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Určete konstantu $c$.

(b) Určete marginální hustoty $f_X$ a $f_Y$.

(c) Jsou náhodné veličiny $X$ a $Y$ nezávislé?

(d) Určete konstantu $\mathsf{P}\,(X > Y)$.

(e) Určete $\mathsf{E}\,\left(\frac{1}{X\,Y}\right)$.

## 6 Podmíněná rozdělení

**36.** Chystáte oslavu narozenin ve své oblíbené restauraci a zvete všechny své příbuzné (budete za ně platit). Množství peněz, které všichni Vaši hosté dohromady projí a propijí (v tisíci Kč), jsou náhodné veličiny $X$ a $Y$. Ze zkušenosti víte, že vektor $(X, Y)'$ má spojité rozdělení charakterizované sdruženou hustotu

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{pro } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Najděte podmíněnou hustotu útraty za jídlo při dané útratě za alkohol.

(b) Najděte podmíněnou střední hodnotu útraty za jídlo při dané útratě za alkohol.

**37.** Hustota náhodného vektoru $\mathbf{Z} = (X, Y)^\mathsf{T}$ je

$$f(x, y) = \begin{cases} c\,y, & \text{je-li } |x| < 1, y > 0, x + y < 1, y - x < 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Určete konstantu $c$.
(b) Určete podmíněnou hustotu $Y$, je-li dáno $X = x$.
(c) Určete $\mathsf{E}\,(\,Y \mid X\,)$ a nakreslete si $\mathsf{E}\,(\,Y \mid X = x\,)$ jako funkci $x$.
(d) Určete $\mathsf{E}\,(\,X \mid Y\,)$ a nakreslete si $\mathsf{E}\,(\,X \mid Y = y\,)$ jako funkci $y$.
(e) Ověřte, že $\mathsf{E}\big(\mathsf{E}\,(\,Y \mid X\,)\big) = \mathsf{E}\,Y$.
(f) Určete $\mathsf{var}\,(Y|X)$.

**38.** Nechť má náhodný vektor $(X,\,Y)'$ rozdělení s hustotou

$$f(x,\,y) = c\,y\,\mathbb{I}_M(x, y),$$

kde $M = \big\{(x,\,y):\ 0 \le y \le 1,\ y \le x \le y + 1\big\}$ a $c > 0$ je vhodná konstanta. Určete

$$\mathsf{E}\left[911\,X - \log\big(\tfrac{Y}{1-Y}\big)\,\big|\,Y\right]$$

**39.** Podmíněná hustota veličiny $X$ je

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{2x}{y^2-1} & \text{pro } 1 \le x \le y,\ 1 \le y \le 2, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Hustota veličiny $Y$ je

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{9}y(y^2-1) & \text{pro } 1 \le y \le 2, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Najděte hustotu $f_X$ veličiny $X$.

**40.** Náhodný vektor $(X, Y)^\mathsf{T}$ má sdruženou hustotu

$$f(x, y) = \begin{cases} cx^2(y + x)^2, & \text{když } (x, y) \in [0, 1]^2, \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Najděte podmíněné hustoty.

**41.** Nechť $X$ a $Y$ jsou nezávislé s geometrickým rozdělením s parametrem $p \in (0, 1)$. Určete $\mathsf{P}\,[\,X = k \mid X + Y = s\,]$.

**42.** Nechť $X$ a $Y$ jsou nezávislé $\mathrm{R}(0, 1)$ rozdělené. Určete

$$\mathsf{E}\,[X + Y|X], \quad \mathsf{E}\,[XY|X].$$

## 7 Transformace náhodných veličin

**43.** Nechť $X$ má binomické rozdělení s parametry $(n_1, p)$ a $Y$ má binomické rozdělení s parametry $(n_2, p)$, $X$ a $Y$ jsou nezávislé. Určete rozdělení $Z = X + Y$.

**44.** Veličina $X$ má rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot \sin x & \text{pro } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Jaké rozdělení má náhodná veličina $Y = 1 - \cos(X)$?

**45.** Náhodná veličina $X$ má rozdělení s hustotou $f(x) = 3x^2$ pro $0 < x < 1$ a $f(x) = 0$ jinak. Určete

(a) Rozdělení veličiny $Y = X^3$.

(b) Střední hodnotu a rozptyl veličiny $Z = \frac{1}{X}$.

**46.** Nechť má náhodná veličina $X$ rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0, \pi]$. Definujme veličiny $Y = X^2$ a $Z = \sin(X)$. Určete

(a) rozdělení (hustotu) veličiny $Y$ a její střední hodnotu,

(b) rozdělení (hustotu) a střední hodnotu veličiny $Z$.

**47.** Nechť $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Určete rozdělení veličiny $Y = X/\lambda$.

**48.** Nechť $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Určete rozdělení veličiny $Y = X^k$, $k \in \mathrm{N}$.

**49.** Určete rozdělení objemu a povrchu krychle s náhodnou délkou hrany s rovnoměrným rozdělením na $(0, 1)$. Určete střední hodnoty těchto hodnot.

**50.** Nechť náhodná veličina $X$ má rovnoměrné rozdělení na $(0, 1)$. Najděte hustotu náhodné veličiny $Y = (X - \frac{2}{3})^2$.

**51.** Nechť $X$ má gama rozdělení $\mathcal{G}(n, \lambda)$, kde $n \in \mathcal{N}$, $\lambda > 0$ jsou parametry. To jest, $X$ má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nechť

$$Y = 2\lambda X.$$

(a) Určete hustotu náhodné veličiny $Y$.

(b) Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny $Y$.

## 8 Transformace náhodných vektorů

**52.** Náhodné veličiny $X, Y$ jsou nezávislé s binomickým rozdělením $\mathsf{Bi}(n,p)$ a $\mathsf{Bi}(m,p)$. Jaké je rozdělení $X+Y$?

**53.** Nechť $X$ a $Y$ jsou nezávislé a nabývají celé kladné hodnoty $k$ s pravděpodobností $2^{-k}$. Najděte rozdělení jejich součtu.

**54.** Nechť $X$ a $Y$ jsou nezávislé náhodné veličiny, přičemž $X$ má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0,1]$ a $Y$ má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[-1,0]$. Označte si $W = X - Y$ a $Z = X + Y$.

(a) Určete rozdělení, střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny $Z$.

(b) Spočtěte $\mathsf{E}\,(ZW)$.

**55.** Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s distribuční funkcí $F$ a hustotou $f$. Označme $U = \max_{1\le i\le n} X_i$ a $V = \min_{1\le i\le n} X_i$.

(a) Spočtěte distribuční funkci a hustotu veličiny $U$.

(b) Spočtěte distribuční funkci a hustotu veličiny $V$.

(c) Nechť $F$ a $f$ odpovídají rovnoměrnému rozdělení na intervalu $[0,1]$. Spočtěte v tomto případě $\mathsf{E}\,U$, $\mathsf{var}\,(U)$, $\mathsf{E}\,V$ a $\mathsf{var}\,(V)$.

**56.** Předpokládejme, že doba čekání na autobus je náhodná veličina $A$ s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $1/\mu$. Poté přestupujeme na vlak a doba čekání $V$ na jeho příjezd má exponenciální rozdělení, tentokrát se střední hodnotou $1/\lambda$. Lze předpokládat, že $A$ a $V$ jsou nezávislé náhodné veličiny.

(a) Určete rozdělení (distribuční funkci a hustotu) celkové doby čekání $A+V$.

(b) Jaká je střední hodnota a rozptyl celkové doby čekání?

(c) Zajímá nás, o kolik déle budeme čekat na vlak než na autobus. Určete proto střední Jaká je pravděpodobnost, že budeme na vlak čekat o více než $k$ minut déle než na autobus ($k \in \mathbb{R}$)? Jaká je pravděpodobnost, že budeme na vlak čekat právě o $k$ minut déle než na autobus ($k \in \mathbb{R}$)?

(d) Jaká je pravděpodobnost, že budeme na vlak čekat více než $k$ násobek doby čekání na autobus ($k > 0$)?

**57.** Najděte rozdělení součtu veličin $U_1, U_2$, jestliže tyto jsou nezávislé a

(a) $U_1 \sim \mathrm{R}(0,1)$, $U_2 \sim \mathrm{R}(0,1)$,

(b) $U_1 \sim \mathrm{R}(0,1)$, $U_2 \sim \mathrm{R}(0,2)$.

**58.** Nechť jsou $X, Y$ nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením $\mathrm{R}[1,2]$. Určete rozdělení a střední hodnotu náhodné veličiny $U = \frac{X}{Y}$.

**59.** Nechť $X$ a $Y$ mají sdruženou hustotu

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= c[xy + \theta(x+y)] \qquad && \text{pro } 0 < x < 2\theta \text{ a } 0 < y < 2\theta, \\
&= 0 && \text{jinak,}
\end{aligned}
$$

kde $c = c_\theta$ je nějaká konstanta a $\theta > 0$ je reálný parametr.

(a) Spočítejte konstantu $c_\theta$.

(b) Spočítejte střední hodnotu $X$ a $Y$.

(c) Spočítejte $\mathsf{cov}(X, Y)$.
(d) Jsou $X$ a $Y$ nezávislé?
(e) Spočítejte hustotu náhodné veličiny $X/Y$ a určete její střední hodnotu.

**60.** Náhodný vektor $(X, Y)^\mathsf{T}$ má sdruženou hustotu

$$f(x, y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda y}, & \text{když } 0 \leq x \leq y, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Jsou $Y$ a $\frac{X}{X-Y}$ nezávislé?

**61.** Buď $(X, Y)^\mathsf{T}$ náhodný vektor s rovnoměrným rozdělením na množině $(0, 1)^2$. Určete rozdělení náhodného vektoru $\big(\exp(X+Y), \exp(X-Y)\big)$.

**62.** Nechť $X, Y$ jsou nezávislé rovnoměrně rozdělené na $[0, \pi/2]$. Určete rozdělení $Z = \cos(X - Y)$.

**63.** Nechť $X$ a $Y$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením $\mathsf{R}[0, 1]$. Nechť $D = \min\{X, Y\}$ a $H = \max\{X, Y\}$. Určete sdruženou hustotu vektoru $(D, H)$. Jsou $D$ a $H$ nezávislé? Určete $\mathsf{cov}(D, H)$.

**64.** Nechť $\boldsymbol{Z} = (X, Y)^\mathsf{T}$ má rovnoměrné rozdělení na jednotkovém kruhu, tj.

$$f_{XY}(x, y) = \tfrac{1}{\pi}\, \mathbb{I}\big\{(x, y) :\ x^2 + y^2 \leq 1\big\}.$$

Nechť

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{X^2 + Y^2} \\ \operatorname{arccotg}\left(\frac{X}{Y}\right) \end{pmatrix}.$$

(a) Určete rozdělení náhodného vektoru $\boldsymbol{W}$.
(b) Určete marginální rozdělení náhodných veličin $U$ a $V$.
(c) Zjistěte, zda jsou náhodné veličiny $U$ a $V$ nezávislé.
(d) Jak by se změnily výsledky, jestliže bychom $V$ definovali jako $V = \operatorname{arctg}\left(\frac{X}{Y}\right)$?

**65.** Nechť náhodný vektor $(X, Y)^\mathsf{T}$ má sdruženou hustotu

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{1 - \sin^2(x)}, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},\ 0 < y < 1, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Najděte sdruženou hustotu náhodného vektoru

$$(W, Z)^\mathsf{T} = \big(Y, \tfrac{Y}{2} + |\sin(X)|\big)^\mathsf{T}.$$

(b) Najděte hustotu náhodné veličiny $Z = \frac{Y}{2} + |\sin(X)|$.
(c) Spočtěte $\mathsf{E}\left[\frac{1}{\cos\left(\arcsin\left|Z - \frac{W}{2}\right|\right)}\right]$.

**66.** Nechť náhodný vektor $(X, Y)^\mathsf{T}$ má sdruženou hustotu

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{|y - \frac{1}{2}|}}, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Najděte sdruženou hustotu náhodného vektoru

$$(W, Z)^{\mathsf{T}} = \left(X, \sqrt{|Y - \tfrac{1}{2}| + X}\right)^{\mathsf{T}}.$$

(b) Najděte hustotu náhodné veličiny $Z = \sqrt{|Y - \frac{1}{2}| + X}$.

(c) Spočtěte $\mathsf{E}\,|Z - W|^3$.

**67.** Nechť náhodný vektor $(X, Y)^{\mathsf{T}}$ má sdruženou hustotu

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} |y|^3, & -1 < x < 1,\ -1 < y < 1, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Najděte hustotu náhodné veličiny $Z = X\,Y^2$.

(b) Spočtěte $\mathsf{E}\,\sqrt{|Z|}$.

# 9 Normální rozdělení

**68.** Nechť $X$ a $Y$ jsou nezávislé náhodné veličiny. $X$ má normální rozdělení $\mathsf{N}(0, 2)$ a $Y$ má normální rozdělení $\mathsf{N}(1, 1)$.

(a) Určete rozdělení $X - Y$.

(b) Určete $\mathsf{P}\,(X + Y > 0)$.

(c) Najděte $z$ takové, pro které platí $\mathsf{P}\,(X + Y > z) = 0{,}95$.

# 1 Výsledky: Klasická pravděpodobnost

**1.** $\frac{2}{5}$

**2.** $\frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}}$

**3.** $\frac{8!\,3!}{10!} = \frac{1}{15}$

**4.**

(a) $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}/k! = 1 - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k/k!$;

(b) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k/k! \to \mathrm{e}^{-1} = 1/\mathrm{e}$ pro $n \to \infty$

**5.**

(a) $\left(\frac{6}{7}\right)^n$

(b) $\frac{\binom{n}{2}\binom{n-2}{3}5^{n-5}}{7^n}$

(c) $\sum_{i=1}^{6}(-1)^{i+1}\binom{7}{i}\left(\frac{7-i}{7}\right)^n$

# 2 Výsledky: Nezávislost, podmíněná pravděpodobnost, úplná pravděpodobnost, Bayesův vzorec

**6.** Jevy jsou závislé.

**7.**

(a) neplatí, $A^C$ a $B^C$ jsou nezávislé,

(b) platí

(c) neplatí

(d) platí

(e) neplatí

**8.** profesor: $\dfrac{3^3}{4^4 - 3^4} = \dfrac{27}{175}$

**9.** studenti: (a) 28/45 (b) ze skupiny B (c) $1 - (0{,}2)^3(0{,}4)^4(0{,}6)^2$

**10.** krabice s míčky: $528/5915 = 0{,}089$

**11.** HUMOR: 5/11

**12.** $\dfrac{1}{(\mathrm{e}-1)(k+1)!}$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots$

**13.** obrazy: (a) 0,977 (b) 0,64

**14.** (a) 0,77, (b) $10^{-5}$, (c) 0,999

**15.** (a) $\mathsf{P}(\text{“6”}) = 7/72$, $\mathsf{P}(\text{“11”}) = 1/24$,

(b) 4/7

(c) $\mathsf{P}(\text{“6”}|\text{chlapec}) = 5/54$, $\mathsf{P}(\text{“6”}|\text{dívka}) = 19/180$, $\mathsf{P}(\text{“6”}) = 157/1620$

# 3 Výsledky: Náhodná veličina – diskrétní rozdělení

**16.** $c = 1/14$, $\mathsf{E}\,X = \frac{18}{7}$, $\mathsf{var}\,X = \frac{19}{49}$,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1, \\ \dfrac{1}{14} & x \in [1, 2), \\ \dfrac{5}{14} & x \in [2, 3), \\ 1 & x \geq 3. \end{cases}$$

$\mathsf{P}(X \geq 2) = \frac{13}{14}$.
Rozdělení $Y$: $\mathsf{P}(Y = 0) = 4/14 = 2/7$ a $\mathsf{P}(Y = 1) = 1/14 + 9/14 = 10/14 = 5/7$, tj. $Y$ má alternativní rozdělení $\mathrm{A}(p)$ s parametrem $p = 5/7$; $\mathsf{E}\,Y = \frac{5}{7}$
**17.** $a = 1/4$, $\mathsf{E}\,X = 5/12$, $\mathsf{var}\,X = 155/144$, rozdělení $Y$: $\mathsf{P}(Y = 0) = 1/2$, $\mathsf{P}(Y = 1) = \mathsf{P}(Y = 4) = 1/4$, $\mathsf{E}\,Y = 5/4$
**18.** basketbalista: $\mathsf{P}(X = n) = \binom{n+k-1}{n} p^k (1-p)^n$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots$
**19.** (a) $\mathsf{E}\,N = 7/2$, $\mathsf{var}\,N = 35/12$
(b)

$$\mathsf{P}(N = i|\text{ součet je 5 }) = \begin{cases} \frac{1296}{2401}, & i = 1, \\ \frac{864}{2401}, & i = 2, \\ \frac{216}{2401}, & i = 3, \\ \frac{24}{2401}, & i = 4, \\ \frac{1}{2401}, & i = 5, \\ 0, & i = 6. \end{cases}$$

(c)

$$\mathsf{P}(N = i|\text{ právě 4 šestky }) = \begin{cases} 0, & i = 1, 2, 3 \\ \frac{12}{187}, & i = 4, \\ \frac{50}{187}, & i = 5, \\ \frac{125}{187}, & i = 6. \end{cases}$$

**20.** Adam a Bedřich: (a) $\left(\frac{13}{18}\right)^{k-1} \frac{1}{9}$, $k = 1, 2, \ldots$; (b) $\frac{2}{5}$; (c) $\frac{18}{15}$.
**21.**

(a) $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{3k-1} \dfrac{1}{6}$ pro $k = 1, 2, \ldots$

(b) $\dfrac{91}{216} \left(\dfrac{5}{6}\right)^{3k-2}$ pro $k = 1, 2, \ldots$ a $1/6$ pro $k = 0$

(c) Karel 36/91, Franta 30/91, Cyril 25/91

(d) $\mathsf{E}\,X = 150/91$

**22.** Počet přestupků má Poissonovo rozdělení s parametrem $p\lambda$.

# 4 Výsledky: Náhodná veličina – spojité rozdělení

**23.** $c = 1/(\mathrm{e} - 1)$,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e} - 1}, & x \in [0, 1], \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

$F^{-1}(u) = \log(1 + u(\mathrm{e} - 1))$ pro $u \in (0, 1)$, $\mathsf{E}\,X = \frac{1}{\mathrm{e}-1}$, $\mathsf{var}\,X = \frac{\mathrm{e}^2 - 3\mathrm{e} + 1}{(\mathrm{e}-1)^2}$.
**24.** $c = \frac{1}{2\log((k+1)/k)}$, $\mathsf{E}\,X = 0 =$ medián $X$ (plyne ihned ze symetrie hustoty),
$\mathsf{var}(X) = c(2k + 1) = \frac{2k+1}{2\log((k+1)/k)}$
**25.** $f(x) = \frac{1}{x}\,\mathbb{I}\{x \geq 1\}$, $F_X^{-1}(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u}}$ pro $u \in (0, 1)$
**26.** $\mathsf{E}\,Z = 3/2$, $\mathsf{var}(Z) = 3/4$

**27.** $a = 1$,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ x\ln(x) - x + 1, & x \in (1, \mathrm{e}), \\ 1, & x \ge \mathrm{e}, \end{cases}$$

$\mathsf{E}\,X = \frac{\mathrm{e}^2}{4} + \frac{1}{4}$.

**28.** Použije se Čebyševova nerovnost.

**29.**

(a) Šikmost $\gamma_3 = 0$, špičatost $\gamma_4 = \frac{9}{5}$.

(b) $\mathsf{E}\,|X - \mathsf{E}\,X|^3 = \frac{1}{32}$.

(c) Z Jensenovy nerovnosti nebo přímým výpočtem lze zjistit, že platí obrácená nerovnost, tj. $\mathsf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{X}}\right) > \frac{1}{\sqrt{\mathsf{E}\,X}}$

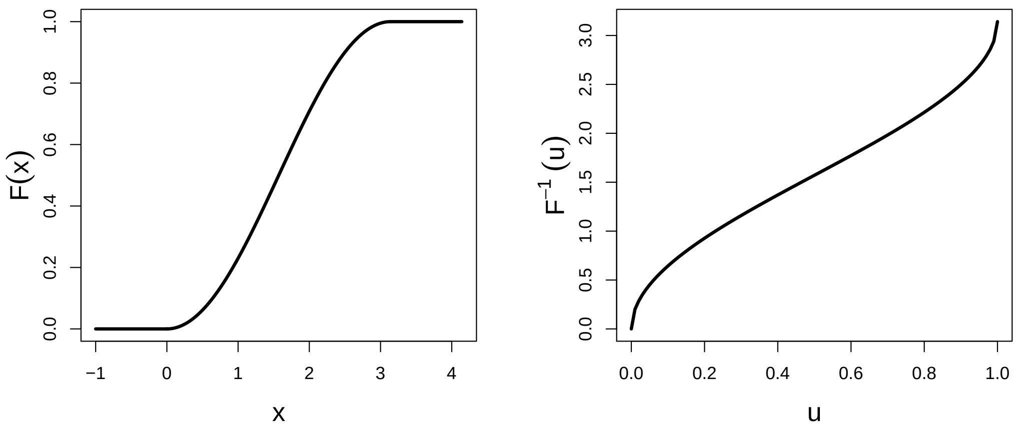
**30.** (a) $c = 1/2$,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ (1 - \cos x)/2 = \sin^2(x/2), & 0 \le x \le \pi, \\ 1, & x > \pi \end{cases}$$

(b) $\mathsf{E}\,X = \pi/2 =$ medián $X$ (plyne ihned ze symetrie hustoty)

(c) $F^{-1}(u) = \arccos(1 - 2u)$, $u \in (0, 1)$

(d) $\mathsf{E}\,Y = 1$, $\mathsf{var}\,(Y) = \frac{1}{3}$




# 5 Výsledky: Náhodné vektory

**31.**

(a)

| | | Y | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| | 2 | 0 | 0 | $\frac{1}{9}$ | 0 | 0 |
| | 3 | 0 | $\frac{1}{9}$ | 0 | $\frac{1}{9}$ | 0 |
| X | 4 | $\frac{1}{9}$ | 0 | $\frac{1}{9}$ | 0 | $\frac{1}{9}$ |
| | 5 | 0 | $\frac{1}{9}$ | 0 | $\frac{1}{9}$ | 0 |
| | 6 | 0 | 0 | $\frac{1}{9}$ | 0 | 0 |

(b) $\mathsf{P}\,(X = 2) = \mathsf{P}\,(X = 6) = \frac{1}{9}$, $\mathsf{P}\,(X = 3) = \mathsf{P}\,(X = 5) = \frac{2}{9}$, $\mathsf{P}\,(X = 4) = \frac{3}{9}$.
$\mathsf{P}\,(Y = -2) = \mathsf{P}\,(Y = 2) = \frac{1}{9}$, $\mathsf{P}\,(Y = -1) = \mathsf{P}\,(Y = 1) = \frac{2}{9}$, $\mathsf{P}\,(Y = 0) = \frac{3}{9}$.
$X$ a $Y$ nejsou nezávislé.

(c) $\mathsf{cov}\,(X,Y) = 0$.

**32.** $c = 1/\pi$, $f_X(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}\,\mathbb{I}\{x \in (-1,1)\} = f_Y(x)$, veličiny nejsou nezávislé.

**33.** (a) $\frac{3}{2}$ (b) Nejsou nezávislé. (c) $\mathsf{cov}\,(X,Y) = \frac{3}{8} - \left(\frac{5}{8}\right)^2 = -\frac{1}{64}$.

**34.**

(a) $\mathsf{cov}\,(X,Y) = 0$, veličiny $X$ a $Y$ však nejsou nezávislé.

(b) $\rho_{XZ} = -1$.

# 6 Výsledky: Podmíněná rozdělení

**36.**

(a) $f_{Y|X}(y|x) = \frac{2(y+x)}{1+2x}\mathbb{I}\{y \in (0,1)\}$ pro $x \in (0,1)$ a $f_{Y|X}(y|x)$ není definována pro $x \notin (0,1)$.

(b) $\mathrm{E}\,[Y \mid X = x] = \frac{2+3x}{3(1+2x)}$ pro $x \in (0,1)$ a $\mathrm{E}\,[Y \mid X = x]$ není definována pro $x \notin (0,1)$.

**37.**

(a) $c = 3$.

(b) $f_{Y|X}(y,x) = \frac{2y}{(1-|x|)^2}\mathbb{I}\big\{y \in (0, 1-|x|)\big\}$ pro $x \in (-1,1)$, pro jiná $x$ nedefinována.

(c) $\mathsf{E}\,(\,Y \mid X = x\,) = \frac{2}{3}\,(1-|x|)$ pro $x \in (-1,1)$, pro jiná $x$ nedefinována. $\mathsf{E}\,(\,Y \mid X\,) = \frac{2}{3}\,(1-|X|)$.

(d) $\mathsf{E}\,(\,X \mid Y = y\,) = 0$ pro $y \in (0,1)$, pro jiná $y$ nedefinována.

(e) $\mathsf{E}\big(\mathsf{E}\,(\,Y \mid X\,)\big) = \frac{2}{3}\,(1 - \mathsf{E}\,|X|) = \ldots = \frac{1}{2} = \mathsf{E}\,Y$.

(f) $\mathsf{var}\,(Y|X) = \frac{1}{18}\,(1-|X|)^2$.

**38.**

$$\mathsf{E}\left[911\,X - \log\!\left(\tfrac{Y}{1-Y}\right) \mid Y\right] = 911\,\mathsf{E}\,(\,X \mid Y\,) - \log\!\left(\tfrac{Y}{1-Y}\right) = 911\left(Y + \tfrac{1}{2}\right) - \log\!\left(\tfrac{Y}{1-Y}\right)$$

**41.**

$$\mathsf{P}\,[\,X = k \mid X + Y = s\,] = \frac{1}{s+1}, \qquad k = 0, 1, \ldots, s.$$

**42.**

$$\mathsf{E}\,[X+Y|X] = \mathsf{E}\,[X|X] + \mathsf{E}\,[Y|X] = X + \mathsf{E}\,Y = X + \tfrac{1}{2},$$
$$\mathsf{E}\,[XY|X] = X\,\mathsf{E}\,[Y|X] = \tfrac{X}{2}.$$

# 7 Výsledky: Transformace náhodných veličin

**45.** (a) $Y$ má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0,1]$,

(b) $\mathsf{E}\,Z = 3/2$, $\mathsf{var}\,(Z) = 3/4$

**46.** (a) distr. funkce $Y$:

$$G(y) = \begin{cases} 0 & y < 0, \\ \sqrt{y}/\pi, & y \in [0, \pi^2], \\ 1 & y > \pi^2 \end{cases}$$

hustota: $g(y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{y}}\,\mathbb{I}\{y \in [0,\pi^2]\}$, $\mathsf{E}\,Y = \pi^2/3$.

(b) distribuční funkce $Z$:

$$H(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \dfrac{2\,\arcsin(z)}{\pi}, & 0 \le z \le 1, \\ 1, & z > 1 \end{cases}$$

hustota $h(z) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-z^2}}\,\mathbb{I}\{z \in [0,1]\}$. $\mathsf{E}\,Z = 2/\pi$

**51.**

1. $f_Y(y) = \dfrac{1}{\Gamma(n)\,2^n}\, y^{n-1}\, \mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}$ pro $y > 0$, jinde je $f_Y(y) = 0$ (rozdělení $\chi^2_{2n}$).

# 8 Výsledky: Transformace náhodných vektorů

**52.** $X + Y$ má binomické rozdělení $\mathsf{Bi}(m + n, p)$
**54.** (a) hustota $f(z) = (1 - |z|)\,\mathbb{I}\{z \in (-1, 1)\}$, $\mathsf{E}\,Z = 0$, $\mathsf{var}\,(Z) = 1/6$; (b) $\mathsf{E}\,(ZW) = 0$.
**55.** maximum a minimum:

(a) $F_U(u) = [F(u)]^n$, $f_U(u) = n[F(u)]^{n-1} f(u)$
(b) $F_V(v) = 1 - [1 - F(v)]^n$, $f_V(v) = n[1 - F(v)]^{n-1} f(v)$
(c) $\mathsf{E}\,U = n/(n + 1)$, $\mathsf{var}\,(U) = n/[(n + 1)^2(n + 2)]$, $\mathsf{E}\,V = 1/(n + 1)$, $\mathsf{var}\,(V) = n/[(n + 1)^2(n + 2)]$

**56.** vlak a autobus:

(a) hustota a distribuční funkce $Z = A + V$: Je-li $\lambda \neq \mu$, pak

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu}{\lambda - \mu}\left(\mathrm{e}^{-\mu z} - \mathrm{e}^{-\lambda z}\right), & z > 0, \\ 0 & z \le 0, \end{cases} \qquad G(z) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\lambda \mathrm{e}^{-\mu z} \mu \mathrm{e}^{-\lambda z}}{\lambda - \mu}, & z > 0 \\ 0, & z \le 0 \end{cases}$$

Je-li $\lambda = \mu$, pak

$$g(z) = \begin{cases} \lambda^2 z \mathrm{e}^{-\lambda z}, & z > 0, \\ 0 & z \le 0, \end{cases} \qquad G(z) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda z} - \lambda z \mathrm{e}^{-\lambda z}, & z > 0 \\ 0, & z \le 0, \end{cases}$$

(b) $\mathsf{E}\,Z = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda}$, $\mathsf{var}\,(Z) = \frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\lambda^2}$,
(c) rozdělení $W = V - A$:

$$G(w) = \begin{cases} 1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{-\lambda w}, & w > 0, \\ \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{\mu w}, & w \le 0. \end{cases} \qquad g(w) = \begin{cases} \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{-\lambda w}, & w > 0, \\ \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{\mu w}, & w < 0, \end{cases}$$

$\mathsf{P}\,(V - A > k) = 1 - G(k)$, $\mathsf{P}\,(V - A = k) = 0$.

(d) $\mathsf{P}\,(V > kA) = \dfrac{\mu}{\lambda k + \mu}$

**58.** $f_U(u) = \left(2 - \dfrac{1}{2\,u^2}\right)\mathbb{I}_{(\frac{1}{2},1]}(u) \;+\; \left(\dfrac{2}{u^2} - \dfrac{1}{2}\right)\mathbb{I}_{(1,2)}(u)$, $u \in \mathbb{R}$, $\mathrm{E}\;U = \frac{3\,\log(2)}{2}$.
**63.** $f_{DH}(d, h) = 2\,\mathbb{I}\{d \in (0, 1), h \in (0, 1), d \le h\}$. Nejsou nezávislé. $\mathsf{cov}\,(D, H) = \frac{1}{36}$.
**64.**

(a) $f_{UV}(u, v) = \frac{2u}{\pi}\,\mathbb{I}\big\{u \in (0, 1), w \in (0, \pi)\big\}$.
(b) $f_U(u) = 2u\,\mathbb{I}\{u \in (0, 1)\}$, $f_V(v) = \frac{1}{\pi}\mathbb{I}\{w \in (0, \pi)\}$.
(c) $U$ a $V$ jsou nezávislé.
(d) $f_{UV}(u, v) = \frac{2u}{\pi}\,\mathbb{I}\big\{u \in (0, 1), w \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)\big\}$.

**67.**

(a) $f_Z(z) = (1 - |z|)\,\mathbb{I}\{z \in (-1, 1)\}$
(b) $\mathsf{E}\,\sqrt{|Z|} = \frac{8}{15}$.

## 9 Výsledky: Normální rozdělení

**68.**

(a) $X - Y \sim \mathsf{N}(-1, 3)$.

(b) $\mathsf{P}\,(X + Y > 0) = 1 - \Phi\big(\frac{-1}{\sqrt{3}}\big) \doteq 0{,}72$.

(c) $z = 1 + \sqrt{3}\,\Phi^{-1}(0{,}95) \doteq 3{,}85$.