Příklady na procvičení z NSTP022

Naposledy změněno: 24. března 2013

1 Klasická pravděpodobnost

1. Z kartiček s čísly $1, 2, 3, 4, 5$ náhodně vybereme tři a položíme je v pořadí, v němž jsme je vybrali. Jaká je pravděpodobnost, že vzniklé trojciferné číslo je sudé?
2. Ve sportce se sází 6 čísel, losuje se 6 ze 49. Spočtěte pravděpodobnost, že právě 4 čísla vsadíme správně.
3. Skupina 10 studentů, z nichž 3 jsou z MFF, se náhodně seřadí do fronty. Určete pravděpodobnost, že 3 studenti z MFF budou vedle sebe.
4. Uvažujme n různých dopisů a n různých obálek (již s nadepsanou adresou). Zmatená sekretářka umístí dopisy do obálek zcela náhodně.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že je alespoň jeden dopis ve správné obálce?
   (b) S jakou pravděpodobností není žádný dopis ve správné obálce? Spočtěte limitu této pravděpodobnosti pro $n \to \infty$.
5. Mějme skupinu n osob ($n > 5$) o kterých můžeme předpokládat, že se narodili nezávisle na sobě. Spočítejte pravděpodobnost, že
   (a) žádný z nich se nenarodil ve středu;
   (b) právě dva se narodili v pondělí a právě tři v sobotu;
   (c) existuje den v týdnu, ve kterém se nikdo z nich nenarodil.
6. V krabici je n černých a m bílých koulí. Které postupně náhodně vytahujeme ven (a již nevracíme zpět do krabice).
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že v k-tém tahu jsme vytáhli bílou kouli?
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že po K-tém tahu ($K < m + n$) bylo vytaženo právě k bílých koulí?
   (c) Jaká je pravděpodobnost, že prvních k vytažených koulí jsou všechny bílé ($k \leq m$).

2 Nezávislost, podmíněná pravděpodobnost, úplná pravděpodobnost, Bayesův vzorec

1. Třikrát po sobě hodíme mincí a zaznamenáme výsledek. Označme rub jako R a líc jako L. Rozhodněte, zda jsou jevy $A = \{RRR, LRR, RLL, LLL\}$, $B = \{RRL, RLR, LLR, LLL\}$ a $C = \{RRL, RLR, LRL, LLL\}$ nezávislé.
2. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení. Své rozhodnutí vždy řádně zdůvodněte (uveďte důkaz nebo protipříklad).
   (a) Jestliže jsou jevy A, B nezávislé, pak o nezávislosti jevů A^C, B^C obecně neumíme rozhodnout.
   (b) Jestliže $\mathsf{P}(A|B) \geq \mathsf{P}(A) > 0$, pak $\mathsf{P}(B|A) \geq \mathsf{P}(B)$.
   (c) Existují A, B neslučitelné jevy, tj. $A \cap B = \emptyset$, takové, že $\mathsf{P}(A) \neq 0$, $\mathsf{P}(B) \neq 0$ a A, B jsou nezávislé.
   (d) Jestliže platí $\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A|B^C)$, pak jsou jevy A, B nezávislé.
   (e) Jestliže $\mathsf{P}(B) > 0$, pak $\mathsf{P}(A|B) \geq \mathsf{P}(A)$.

3. Roztržitý profesor zapomene v obchodě deštník s pravděpodobností $1/4$. Cestou ze školy navštívil čtyři obchody a domů přišel bez deštníku. Jaká je pravděpodobnost, že deštník zapomněl ve čtvrtém obchodě?

4. Tři skupiny studentů řeší obtížný příklad. Ve skupině A jsou 3 velmi chytří studenti a každý z nich vyřeší příklad s pravděpodobností 0.8. Ve skupině B jsou 4 průměrní studenti a každý z nich vyřeší příklad s pravděpodobností 0.6. Ve skupině C jsou 2 slabí studenti a každý z nich vyřeší příklad s pravděpodobností pouze 0.4.
   (a) S jakou pravděpodobností náhodně vybraný student vyřeší příklad?
   (b) Náhodně vybraný student příklad nevyřešil. Ze které skupiny nejpravděpodobněji byl?
   (c) Studenti pracují nezávisle. S jakou pravděpodobností bude příklad vyřešen?

5. V krabici je 15 tenisových míčků, z toho 9 úplně nových. Pro první hru si náhodně vybereme 3 míčky a po skončení hry je vrátíme zpátky. Pro druhou hru vybereme opět 3 míčky. Určete pravděpodobnost toho, jsou že všechny 3 míčky použité v druhé hře nové.

6. Slovo „humor“ se v americké angličtině píše jako HUMOR a v britské angličtině jako HUMOUR. Na zahradní slavnosti byly $2/3$ Američanů a $1/3$ Britů. Náhodně vybraný člověk napsal slovo „humor“ (svým způsobem) a z tohoto slova bylo náhodně vybráno jedno písmeno. S jakou pravděpodobností byl daný člověk Brit, jestliže bylo vybráno písmeno "U"?

7. V truhle je neznámý počet mincí: jedna zlatá mince a náhodný počet stříbrných mincí, přičemž stříbrných mincí je právě k s pravděpodobností $\frac{e^{-1}}{k!}$ pro $k = 0, 1, \ldots$. Náhodně vylosujeme jednu minci a ta je zlatá. Jaké je pravděpodobnost, že v truhle bylo právě k stříbrných mincí za této dodatečné informace?

8. Ve sbírce 50 obrazů je 5 padělků. Jestliže je obraz falešný, znalec to pozná s pravděpodobností 80%. Je-li obraz originál, znalec ho mylně posoudí s pravděpodobností 5%. Určete
   (a) pravděpodobnost, že obraz je originál, jestliže byl znalcem označen za originál,
   (b) pravděpodobnost, že obraz je padělaný, jestliže byl znalcem označen za padělek.

9. Každý lékařský test je charakterizován svojí senzitivitou a specificitou, kde
   - senzitivita = pravděpodobnost pozitivního výsledku, je-li testovaná osoba nemocná,
   - specificita = pravděpodobnost negativního výsledku, je-li testovaná osoba zdravá.

   Pro test zjišťující přítomnost HIV viru v těle se uvádí senzitivita 99.9% a specificita 99.7%. Uvažujme hypotetickou populaci, ve které se vyskytuje 1% lidí s virem HIV.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že je osoba s pozitivním výsledkem testu skutečně HIV pozitivní?
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že je osoba ve skutečnosti HIV pozitivní, dává-li test negativní výsledek?
   (c) U pozitivně testovaných jedinců se test provádí ještě jednou. Jaká je pravděpodobnost, že je člověk skutečně HIV pozitivní, byl-li i druhým testem označen za HIV pozitivního?

10. Na stole jsou dvě kostky — růžová a bledě zelená. Růžová kostka je pravidelná devítistěnná kostka, bledě zelená je pravidelná dvanáctistěnná kostka.
    (a) Náhodně vybereme kostku a hodíme. Jaká je pravděpodobnost, že padne šestka? Jaká je pravděpodobnost, že padne jedenáctka?
    (b) Padla jednička, jaká je pravděpodobnost, že jsme házeli růžovou kostkou?
    (c) Nyní předpokládejme, že děvčatům se více líbí růžová kostka, a tak si ji vyberou s pravděpodobností $4/5$. Naopak, chlapci si vyberou bledě zelenou kostku s pravděpodobností $2/3$.
        - Jaká je pravděpodobnost, že padne šestka, házel-li chlapec?

- Jaký je pravděpodobnost, že padne šestka, házela-li dívka?
- Jaká je pravděpodobnost, že padne šestka, házel-li náhodný student ze třídy, ve které je 10 chlapců a 5 dívek?

3 Náhodná veličina — diskrétní rozdělení

1. Diskrétní náhodná veličina X nabývá pouze hodnot $1, 2, 3$ s pravděpodobnostmi $\mathsf{P}(X = k) = c \cdot k^2 \quad k = 1, 2, 3$. Spočítejte konstantu c, střední hodnotu $\mathsf{E}\,X$ a rozptyl $\mathsf{Var}\,X$, distribuční funkci F a pravděpodobnost $\mathsf{P}(X \geq 2)$. Určete dále rozdělení veličiny $Y = (X - 2)^2$ a $\mathsf{E}\,Y$.
2. Náhodná veličina X nabývá pouze hodnot $-1, 0, 1, 2$, a to s pravděpodobnosti $\mathsf{P}(X = -1) = \frac{1}{6}$, $\mathsf{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$, $\mathsf{P}(X = 1) = \frac{1}{12}$ a $\mathsf{P}(X = 2) = a$. Určete konstantu a, tak aby se jednalo o pravděpodobnostní rozdělení. Spočítejte střední hodnotu $\mathsf{E}\,X$ a rozptyl $\mathsf{Var}\,X$. Určete rozdělení veličiny $Y = X^2$ a spočítejte $\mathsf{E}\,Y$.
3. Basketbalista hází na koš, jeho pokusy jsou nezávislé a v každém z nich se trefí s pravděpodobností $p \in (0, 1)$. Rozhodl se, že skončí teprve až vhodí k košů. Označme X počet neúspěšných hodů předcházejících k-tému úspěchu (k-tému vhozenému koši). Určete rozdělení náhodné veličiny X.
4. Na stole leží N kostek, kde N je náhodná veličina s rozdělením $\mathsf{P}(N = 1) = 1/4$, $\mathsf{P}(N = 2) = 1/2$ a $\mathsf{P}(N = 3) = 1/4$. Hodíme všemi kostkami najednou. Jaký je očekávaný počet šestek?
5. Na stole leží N kostek, kde N je náhodná veličina s rozdělením $\mathsf{P}(N = i) = 1/6$, $i = 1, \ldots, 6$.
   (a) Spočtěte střední hodnotu a rozptyl veličiny N.
   (b) Určete rozdělení N za podmínky, že součet čísel na všech kostkách dohromady je roven 5.
   (c) Určete rozdělení N za podmínky, že na kostkách padly právě 4 šestky.
6. Adam a Bedřich hrají následující hru. Každý hodí jednou (pravidelnou šestistěnnou) kostkou. Pokud je na obou kostkách součet pět, tak vyhrává Adam. Pokud je součet sedm, tak vyhrává Bedřich. Pokud není součet ani pět ani sedm, tak toto kolo skončilo nerozhodně a oba dva házejí znovu.
   (a) Určete pravděpodobnost, že Adam vyhraje v k-tém kole.
   (b) Určete pravděpodobnost, že Adam vyhraje.
   (c) Určete střední hodnotu počtu odehraných kol.
7. Dva hráči házejí postupně (pravidelnou šestistěnnou) kostkou. Začíná hráč A, který vyhraje, padne-li mu jednička (a pak již hra končí). Pokud hráči A nepadla jednička, hází hráč B, který vyhraje, pokud mu padne dvojka nebo trojka. Tím končí první kolo. Pokud v prvním kole nevyhrál ani hráč B, začíná se druhé kolo a hází opět hráč A, atd...
   (a) Určete pravděpodobnost, že hráč A vyhraje v k-tém kole.
   (b) Určete pravděpodobnost, že hráč A vyhraje.
   (c) Určete pravděpodobnost, že hráč B hodí právě k-krát.
   (d) Určete stření hodnotu počtu všech hodů.

4 Náhodná veličina — spojité rozdělení

1. Náhodná veličina X má rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} c\,e^x & \text{pro } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete konstantu c, distribuční funkci $F(x)$, střední hodnotu $\mathsf{E}\,X$ a rozptyl $\mathsf{Var}\,(X)$.

2. Vypočtěte momentovou vytvořující funkci normálního rozdělení $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$.
3. Nechť $k > 1$ a uvažujme rozdělení s hustotou $f(x) = c/|x|$ pro $k < |x| < k+1$ a $f(x) = 0$ jinak. Spočtěte konstantu $c > 0$, $\mathsf{E}\,X$, $\mathsf{Var}\,(X)$ a medián X.
4. Náhodná veličina X má rozdělení s hustotou $f(x) = 3x^2$ pro $0 < x < 1$ a $f(x) = 0$ jinak. Určete
   (a) Rozdělení veličiny $Y = X^3$.
   (b) Střední hodnotu a rozptyl veličiny $Z = \frac{1}{X}$.
5. Nechť má náhodná veličina X rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0, \pi]$. Definujme veličiny $Y = X^2$ a $Z = \sin(X)$. Určete
   (a) rozdělení (hustotu) veličiny Y a její střední hodnotu,
   (b) rozdělení (hustotu) a střední hodnotu veličiny Z.
6. Veličina X má rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot \sin x & \text{pro } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

   (a) Určete konstantu $c > 0$ a distribuční funkci F (načrtněte).
   (b) Spočítejte střední hodnotu $\mathsf{E}\,X$.
   (c) Vyjádřete kvantilovou funkci F^{-1} a určete medián.
   (d) Jaké rozdělení má náhodná veličina $Y = 1 - \cos(X)$?
7. Mějme dán pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami a, b a přeponou $c = 1$. Úhel mezi odvěsnou b a přeponou c je náhodná veličina s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(0, \pi/2)$.
   (a) S jakou pravděpodobností je daný trojúhelník rovnoramenný?
   (b) Jaké je rozdělení úhlu, který svírá odvěsna a s přeponou c? S jakou pravděpodobností leží tento úhel v intervalu $(\pi/6, \pi/3)$?
   (c) Určete rozdělení délky odvěsny a. Načrtněte graf hustoty a distribuční funkce tohoto rozdělení. S jakou pravděpodobností je odvěsna a delší než $1/2$?
   (d) Spočtěte střední délku odvěsny a a její rozptyl.
   (e) Určete očekávaný obsah trojúhelníku.

5 Náhodné vektory

1. Házíme třikrát mincí. Označme X počet líců v prvních dvou hodech a Y počet rubů v posledních dvou hodech.
   (a) Určete sdružené rozdělení vektoru (X, Y).
   (b) Určete marginální rozdělení X a Y. Jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé?
   (c) Určete jejich kovarianci a korelační koeficient.
2. Náhodný vektor (X, Y) má rozdělení s hustotou $f(x, y) = \begin{cases} cxye^{-(x^2+y^2)} & \text{pro } x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0 & \text{jinak .} \end{cases}$
   (a) Určete konstantu c tak, aby f byla hustota.
   (b) Spočtěte marginální hustoty f_X a f_Y veličin X a Y . Jsou veličiny X a Y nezávislé?
   (c) Spočtěte $\mathsf{E}\,(X^2 + Y^2)$.

3. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má rovnoměrné rozdělení na jednotkovém kruhu, tj. jeho hustota je dána jako $f(x, y) = c$ pro $x^2 + y^2 \leq 1$ a $f(x, y) = 0$ jinak. Určete konstantu c a marginální rozdělení veličin X a Y. Rozhodněte, zda jsou veličiny X a Y nezávislé.
4. Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny, přičemž X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0, 1]$ a Y má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[-1, 0]$. Označte si $W = X - Y$ a $Z = X + Y$.
   (a) Určete rozdělení, střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny Z.
   (b) Spočtěte $\mathsf{E}\,(ZW)$.
5. Náhodné veličiny X, Y jsou nezávislé s binomickým rozdělením $\mathsf{Bi}(n, p)$ a $\mathsf{Bi}(m, p)$. Jaké je rozdělení $X + Y$?
6. Nechť $(X, Y)'$ je náhodný vektor s hustotou $f(x, y) = c(x^2 + y^2)$ pro $0 < x < 1,\ 0 < y < 1$ a $f(x, y) = 0$ jinak.
   (a) Určete konstantu c.
   (b) Jsou veličiny X a Y nezávislé?
   (c) Spočtěte $\mathsf{P}(X > Y)$.
   (d) Spočtěte $\mathsf{E}\left(\frac{1}{X^2+Y^2}\right)$.
7. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s distribuční funkcí F a hustotou f. Označme $U = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ a $V = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$.
   (a) Spočtěte distribuční funkci a hustotu veličiny U.
   (b) Spočtěte distribuční funkci a hustotu veličiny V.
   (c) Nechť F a f odpovídají rovnoměrnému rozdělení na intervalu $[0, 1]$. Spočtěte v tomto případě $\mathsf{E}\,U$, $\mathsf{Var}\,(U)$, $\mathsf{E}\,V$ a $\mathsf{Var}\,(V)$.
8. Nechť X a Y jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením $\mathsf{R}[0, 1]$. Nechť $D = \min\{X, Y\}$ a $H = \max\{X, Y\}$. Určete kovarianci $\mathsf{Cov}\,(D, H)$. Jsou D a H nezávislé?
9. Předpokládejme, že doba čekání na autobus je náhodná veličina A s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $1/\mu$. Poté přestupujeme na vlak a doba čekání V na jeho příjezd má exponenciální rozdělení, tentokrát se střední hodnotou $1/\lambda$. Lze předpokládat, že A a V jsou nezávislé náhodné veličiny.
   (a) Určete rozdělení (distribuční funkci a hustotu) celkové doby čekání $A + V$.
   (b) Jaká je střední hodnota a rozptyl celkové doby čekání?
   (c) Zajímá nás, o kolik déle budeme čekat na vlak než na autobus. Určete proto střední hodnotu, rozptyl a rozdělení (distribuční funkci a hustotu) náhodné veličiny $V - A$.[1] Jaká je pravděpodobnost, že budeme na vlak čekat o více než k minut déle než na autobus ($k \in \mathbb{R}$)? Jaká je pravděpodobnost, že budeme na vlak čekat právě o k minut déle než na autobus ($k \in \mathbb{R}$)?
   (d) Jaká je pravděpodobnost, že budeme na vlak čekat více než k násobek doby čekání na autobus ($k > 0$)?

6 Limitní věty

1. Nechť $X_1, X_2, \ldots$ jsou nezávislé náhodné veličiny takové, že

$$\mathsf{P}(X_n = j) = \frac{1}{10} \quad \text{pro} \quad j \in \{0, 1, \ldots, 9\},$$

[1] Distribuční funkci $G(x)$ veličiny $V - A$ spočítáte jako pravděpodobnost náhodného jevu $[V - A \leq x]$ pro $x \in \mathbb{R}$. Může vám pomoci namalovat si vhodný obrázek.

pro všechna $n = 1, 2, \ldots$. Jaká je pravděpodobnost, že jev $[X_n = 6]$ nastane jen pro konečně mnoho n?

2. Nechť X_n jsou nezávislé a stejně rozdělené náhodné veličiny. Ukažte, že
   (a) je-li $\mathsf{E}\,|X_1| = \infty$, pak s pravděpodobností jedna nastane nekonečně mnoho jevů $[|X_n| \geq n]$.
   (b) je-li $\mathsf{E}\,|X_1| < \infty$, pak s pravděpodobností jedna nastane nejvýše konečně mnoho jevů $[|X_n| \geq n]$.

3. Nechť $X_1, X_2, \ldots$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in (-1, 1), \\ 0, & \text{jinde.} \end{cases}$$

   Určete pravděpodobnost, že
   (a) nekonečně krát nastane jev $A_i = [|X_i| < \frac{1}{i^2}]$,
   (b) nekonečně krát nastane jev $A_i = [|X_1| < \frac{1}{i^2}]$,
   (c) nekonečně krát nastane jev $A_i = [|X_i| < \frac{1}{i}]$,
   (d) nekonečně krát nastane jev $A_i = [|X_1| < \frac{1}{i}]$.

4. Nechť $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ jsou nezávislé náhodné veličiny, kde X_k, $k = 1, 2, \ldots$, má hustotu

$$f(x) = \frac{1}{2}\, k^{-\lambda} \exp\Big\{-k^{-\lambda}|x|\Big\} \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R},$$

   kde λ je nějaký parametr.
   (a) Dokažte, že $\overline{X}_n = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} X_k$ konverguje k 0 skoro jistě pro $\lambda < 1/2$.
   (b) Splňuje posloupnost $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ centrální limitní větu? Pokud ano, tak co nejvíce explicitně zformulujte, co nám tato věta dává.
   (c) Dokažte, že X_k konverguje v pravděpodobnosti k nule pro $k \to \infty$ pro $\lambda < 0$.

5. Nechť má veličina X hustotu $f(x) = \dfrac{x^m}{m!}\, e^{-x}$ pro $x \geq 0$ a $f(x) = 0$ jinak, kde $m \in \mathbb{N}$.
   (a) Spočítejte $\mathsf{E}\,X$ a $\mathsf{Var}\,(X)$.
   (b) Pomocí Čebyševovy nerovnosti ukažte, že platí

$$\mathrm{P}\Big(0 < X < 2(m+1)\Big) > \frac{m}{m+1}.$$

6. V Dolní Lhotě se koná výstava dojnic na kterou se sjede 10 000 lidí z širokého okolí. Každý návštěvník výstavy si potřebuje v jediném bankomatu, který je v Dolní Lhotě k dispozici, vybrat hotovost. V bankomatu se nacházejí pouze tisícikorunové bankovky. Konkrétní osoba vybere nezávisle na ostatních K tisícikorun. Předpokládejme, že K je náhodnou veličinou, jenž se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda = 1$. Kolik musí být před začátkem výstavy v bankomatu tisícikorun, aby s pravděpodobností alespoň 0,99 nedošlo k celkovému vybrání bankomatu během výstavy?

7. Hodíme stokrát šestistěnnou hrací kostkou. Určete přibližnou hodnotu pravděpodobnosti, s jakou výsledný součet leží v rozmezí od 320 do 380 (včetně)?

8. Pořádáte svatební hostinu a objednali jste 200 zákusků. Ze zkušenosti víte, že počet zákusků, který sní náhodný host, se řídí Poissonovým rozdělením se střední hodnotou 4. Kolik může nejvýše dorazit hostů na hostinu, aby se s pravděpodobností alespoň 0.9 nemusel žádný z hostů v jídle omezovat (tj. aby mohl sníst tolik zákusků, kolik jen chce)?

9. Počet studentů, kteří během konzultačních hodin v jednom týdnu navštíví profesora A, je roven k s pravděpodobností $1/5$ pro $k = 1, \ldots, 5$. Zjistěte, s jakou pravděpodobností bude profesor A během akademického roku (40 týdnů) konzultovat s nejvýše 100 studenty. Při řešení příkladu předpokládejte, že počty konzultacechtivých studentů v jednotlivých týdnech jsou vzájemně nezávislé.

10. V daný den navštíví menzu n studentů, přičemž pravděpodobnost, že náhodný student chce vegetariánské jídlo je $p \in (0,1)$. Označme V_n náhodnou veličinu udávající počet studentů požadujících vegetariánský oběd. Najděte ε tak, aby

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{V_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 0{,}97.$$

Vyčíslete pro $p = 0,1$ a $n = 100$ studentů.

11. Pravděpodobnost zásahu terče je při každém ze 700 výstřelů 0.4. Jaká je pravděpodobnost toho, že odchylka relativní četnosti zásahů od uvedené pravděpodobnosti nepřesáhne 0.05?

7 Bodový odhad

1. Nechť $X_1, X_2, \ldots$ jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0, a]$, kde $a > 0$ je neznámý parametr. Uvažujme veličiny $U_n = \max_{1 \le i \le n} X_i$ a $T_n = 2\overline{X}_n$.
   (a) Ukažte, že U_n je maximálně věrohodný odhad parametru a.
   (b) Ukažte, že U_n konverguje k a v pravděpodobnosti.
   Návod: Odvoďte distribuční funkci náhodné veličiny U_n a ukažte, že pravděpodobnost $\mathsf{P}(|U_n - a| \ge \varepsilon)$ konverguje k nule.
   (c) Ukažte, že U_n konverguje k a skoro jistě.
   (d) Jak musíme U_n „modifikovat“ (přenásobit vhodnou konstantou), abychom dostali nestranný odhad V_n parametru a? Je tento odhad V_n konzistentní?
   (e) Rozhodněte, zda je T_n nestranný a konzistentní odhad parametru a.
   (f) Porovnejte rozptyl odhadů T_n a V_n.
   (g) Na základě všech svých zjištění rozhodněte, který odhad parametru a vám připadá „nejlepší“.

2. Buďte $X_1, \ldots, X_n$ nezávislé náhodné veličiny s logaritmicko-normálním rozdělením s hustotou

$$f(x;\mu) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\Big\{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2}\Big\}, & x > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Najděte maximálně věrohodný odhad parametru μ a vyšetřete jeho nestrannost a konzistenci.

3. Uvažujte situaci jako v předchozím příkladě. Je zde výběrový průměr $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ nestranný a konzistentní odhad parametru μ?

4. Mějme náhodný výběr o rozsahu n z normálního rozdělení $\mathrm{N}(\mu_0, \sigma^2)$, kde $\mu_0 \in \mathbb{R}$ je známá hodnota a $\sigma^2 > 0$ neznámý parametr. Nalezněte metodou maximální věrohodnosti odhad parametru σ^2. Vyšetřete nestrannost a konzistenci.

5. Uvažujte situaci jako v předchozím příkladě. Je výběrový rozptyl $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ nestranný a konzistentní odhad parametru σ^2?

6. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny s alternativním rozdělením, tj.

$$\mathsf{P}(X_i = x) = p^x(1-p)^{1-x}. \quad x \in \{0, 1\},$$

kde $p \in (0,1)$ je neznámý parametr.

(a) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru p.

(b) Je $\widehat{p}_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n X_i^2$ konzistentní a nestranný odhad parametru p?

(c) Je $\widetilde{p}_n = X_1 - X_2 + X_3$ konzistentní a nestranný odhad parametru p?

7. Uvažujte situaci jak v předchozím příkladě. Vyšetřete, zda $\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)$ je nestranný a konzistentní odhad parametrické funkce $p(1-p)$.

8. Buďte $X_1, \ldots, X_n$ náhodný výběr z hustoty

$$f(x;\theta) = \tfrac{\theta}{x^2}\,\mathbb{I}\{x > \theta\}, \qquad \theta > 0.$$

Najděte maximálně věrohodný odhad parametru θ a vyšetřete jeho nestrannost a konzistenci.

9. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny takové, že

$$P(X_i = k) = \frac{e^{-1/\theta}}{\theta^k\, k!} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

kde $\theta > 0$ je neznámý parametr. Najděte maximálně věrohodný odhad parametru θ a vyšetřete jeho nestrannost a konzistenci.

8 Intervalový odhad

1. Předpokládáme, že výška chlapců ve věku 9,5 až 10 let má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ s neznámou střední hodnotou μ a známým rozptylem $\sigma^2 = 39{,}112$. Změřili jsme výšku $n = 15$ chlapců a vypočítali výběrový průměr $\bar{X} = 139{,}13$.

(a) Určete oboustranný intervalový odhad o spolehlivosti 99% pro neznámý parametr μ.

(b) Určete dolní intervalový odhad o spolehlivosti 99% pro neznámý parametr μ.

(c) Určete horní intervalový odhad o spolehlivosti 99% pro neznámý parametr μ.

2. Mějme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_{12}$ z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ s neznámou střední hodnotou μ a neznámým rozptylem σ^2. Vypočítali jsme výběrový průměr a výběrový rozptyl

$$\bar{X} = 14{,}306, \quad S_n^2 = 0{,}327.$$

(a) Najděte oboustranný intervalový odhad o spolehlivosti 95% pro střední hodnotu μ.

(b) Najděte oboustranný intervalový odhad o spolehlivosti 95% pro rozptyl σ^2.

3. Průzkum veřejného mínění měl za úkol zjistit názor občanů ČR na výstavbu amerického radaru. Do studie bylo zahrnuto $n = 400$ občanů, z nichž 240 vyjádřilo souhlas s výstavbou.

(a) Odhadněte bodově podíl občanů ČR, kteří souhlasí s výstavbou radaru. Jaký model používáte? Jaké jsou teoretické vlastnosti, rozdělení a asymptotické rozdělení tohoto bodového odhadu?

(b) Určete intervalový odhad o asymptotické spolehlivosti 95% pro podíl občanů, kteří souhlasí s radarem.

(c) Jaký by musel být rozsah výběru n, aby intervalový odhad s asymptotickou spolehlivostí 95% pro tento podíl měl šířku nejvýše 0,03 (uvažujeme-li, že podíl občanů zahrnutých ve studii, kteří souhlasí, se nezmění).

4. Chceme porovnat průměrnou výšku dvacetiletých chlapců a dívek. Studie se zúčastnilo 25 chlapců (veličiny $X_1, \ldots, X_{25}$) a 20 dívek (veličiny $Y_1, \ldots, Y_{20}$). Obdrželi jsme následující výsledky:

$$\bar{X} = 180{,}6, \quad \bar{Y} = 164{,}9, \quad S_X^2 = 6{,}5, \quad S_Y^2 = 9{,}3.$$

Lze předpokládat, že výška chlapců i dívek má normální rozdělení se stejným rozptylem σ^2. Sestrojte intervalový odhad pro rozdíl průměrné výšky o spolehlivosti 95 %.

9 Testování hypotéz

Součástí řešení úloh na testování hypotéz je přesné zformulování modelu včetně všech předpokladů, nulové a alternativní hypotézy a také závěru plynoucího z provedeného testu.

1. Během 16 červencových dnů byly naměřeny následující teploty:

22	26	28	24	27	20	29	32
28	21	25	27	26	28	30	22

   Testujte hypotézu, že průměrná teplota v červenci je $25°C$. Volte hladinu testu $\alpha = 0,05$.

2. Dle výrobce má mít auto na 100 km průměrnou spotřebu 9 l. U 20 náhodně vybraných aut byla zjištěna následující spotřeba:

8,8	8,9	9,0	8,7	9,3	9,0	8,7	8,8	9,4	8,6
8,9	9,2	9,4	8,9	9,1	8,8	9,4	9,3	9,1	8,9

   Potvrzují naměřené hodnoty tvrzení výrobce? Volte hladinu testu $\alpha = 0,05$.

3. Má se rozhodnout, zda se u osobního automobilu určité značky při správném seřízení geometrie vozu sjíždějí obě přední pneumatiky stejně rychle. Bylo proto vybráno 6 nových vozů a po určité době bylo zjištěno, o kolik milimetrů se sjely jejich pravé a levé přední pneumatiky.

Číslo automobilu	1	2	3	4	5	6
Pravá pneumatika	1,8	1,0	2,2	0,9	1,5	1,6
Levá pneumatika	1,5	1,1	2,0	1,1	1,4	1,4

   Lze na základě získaných dat zamítnout hypotézu, že se obě přední pneumatiky sjíždějí stejně rychle?

4. Ve třídě byly zjištěny následující výšky žáků:

Chlapci	130	140	136	141	139	133	149	151	139	136	138	142	127	139	147
Dívky	135	141	143	132	146	146	151	141	141	131	142	141			

   Testujte, zda chlapci a dívky jsou v průměru stejně vysocí. Volte $\alpha = 0,05$.

5. Sleduje se účinek dvou protikorozních látek. První byla použita ve 20 případech, druhá ve 25 případech. Po stanovené době byl zjištěn stupeň poškození s těmito výsledky:

$$\bar{X}_m = 82{,}4, \quad S_X^2 = 12, \quad \bar{Y}_n = 80, \quad S_Y^2 = 10.$$

   Dá se na hladině $\alpha = 0,05$ prohlásit, že mezi protikorozními látkami není rozdíl? Jaký by byl závěr na hladině $\alpha = 0,01$?

6. Před francouzským referendem o euroústavě (29. 5. 2006) nechal list Le Figaro 20. a 21. května provést průzkum veřejného mínění. Z 950 dotázaných se 511 vyslovilo proti euroústavě. Na hladině 0,05 vyšetřete, zda většina je proti.

7. Pan Josef je vášnivý kuřák. Za posledních 50 dní vykouřil 2200 cigaret, přičemž výběrový rozptyl vykouřených cigaret v jednotlivých dnech je 36 (cigaret^2).
   (a) Sestavte oboustranný intervalový odhad o spolehlivosti 90 % pro střední hodnotu počtu vykouřených cigaret za jeden den.
   (b) Dá se na hladině 5 % zamítnout hypotéza, že střední hodnota počtu počtu cigaret, které pan Josef denně vykouří, je 40?

8. Přesnost stroje je charakterizována rozptylem délky vyrobených předmětů. Stroj je špatně seřízen, pokud délka výrobku má rozptyl větší než $400\,(\mu\text{m})^2$. Vybereme náhodně 15 výrobků, výběrový rozptyl jejich délek je $680\,(\mu\text{m})^2$. Je třeba stroj seřídit? Zformulujte nulovou a alternativní hypotézu, doplňte předpoklady a testujte na hladině 0,1 a 0,01.

10 Regresní analýza

1. Nechť naše pozorování $Y_1, \ldots, Y_n$ splňují model

$$Y_i = \beta\, i + e_i, \qquad i = 1. \ldots, n,$$

kde $e_1, \ldots, e_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou a konečným rozptylem σ^2. Ukažte, že metoda nejmenších čtverců nám dává následující odhad parametru β

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n i\, Y_i}{\sum_{i=1}^n i^2}.$$

Dokažte nestrannost tohoto odhadu a spočtěte jeho rozptyl.

2. Nechť naše pozorování $Y_1, \ldots, Y_n$ splňují model

$$Y_i = \beta\, x_i + e_i, \qquad i = 1. \ldots, n,$$

kde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou známé kladné konstanty, $e_1, \ldots, e_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou a konečným rozptylem σ^2. Ukažte, že odhad

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i}.$$

je nestranným odhadem parametru β a spočtěte jeho rozptyl.