Matematika III

Matematika III

- Primitivní funkce

Matematika III

- Primitivní funkce
- Zobecněný Riemannův integrál

Matematika III

- Primitivní funkce
- Zobecněný Riemannův integrál
- Vícerozměrný integrál

Matematika III

- Primitivní funkce
- Zobecněný Riemannův integrál
- Vícerozměrný integrál
- Lineární algebra

Matematika III

- Primitivní funkce
- Zobecněný Riemannův integrál
- Vícerozměrný integrál
- Lineární algebra
- Taylorův polynom

Matematika III

- Primitivní funkce
- Zobecněný Riemannův integrál
- Vícerozměrný integrál
- Lineární algebra
- Taylorův polynom
- Extrémy funkcí více proměnných

VIII.2. Primitivní funkce

VIII.2. Primitivní funkce

Definice

Nechť funkce f je definována na neprázdném otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce $F\colon I \to \mathbb{R}$ je primitivní funkce k f na I, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

VIII.2. Primitivní funkce

Definice

Nechť funkce f je definována na neprázdném otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce $F\colon I \to \mathbb{R}$ je primitivní funkce k f na I, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Věta 1

Nechť F a G jsou primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.

Poznámka

Množinu všech primitivních funkcí k funkci f značíme symbolem

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka

Množinu všech primitivních funkcí k funkci f značíme symbolem

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Skutečnost, že F je primitivní funkcí k f na I zapisujeme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} F(x), \quad x \in I.$$

Věta

Nechť f je spojitá funkce na intervalu (a, b) a nechť $c \in (a, b)$. Označíme-li $F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pro $x \in (a, b)$, pak $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$, neboli funkce F je primitivní k f na (a, b).

Věta

Nechť f je spojitá funkce na intervalu (a, b) a nechť $c \in (a, b)$. Označíme-li $F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pro $x \in (a, b)$, pak $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$, neboli funkce F je primitivní k f na (a, b).

Důsledek 2

Nechť f je spojitá funkce na neprázdném otevřeném intervalu I. Pak f má na I primitivní funkci.

Věta 3 (Newtonův-Leibnizův vzorec)

Nechť f je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, $a < b$, a nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Pak existují vlastní limity $\lim_{x\to a+} F(x)$, $\lim_{x\to b-} F(x)$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x).$$

Věta 4

Nechť funkce f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F, funkce g má na I primitivní funkci G a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I.

Primitivní funkce k některým důležitým funkcím

Primitivní funkce k některým důležitým funkcím

- $\displaystyle\int x^n \,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ na $\mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$ pro $n \in \mathbb{Z}$, $n < -1$,

Primitivní funkce k některým důležitým funkcím

- $\displaystyle\int x^n \,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ na $\mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$ pro $n \in \mathbb{Z}$, $n < -1$,
- $\displaystyle\int x^\alpha \,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ na $(0, +\infty)$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

Primitivní funkce k některým důležitým funkcím

- $\displaystyle\int x^n \,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ na $\mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$ pro $n \in \mathbb{Z}$, $n < -1$,
- $\displaystyle\int x^\alpha \,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ na $(0, +\infty)$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,
- $\displaystyle\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \log|x|$ na $(0, +\infty)$ a na $(-\infty, 0)$,

Primitivní funkce k některým důležitým funkcím

- $\displaystyle\int x^n \, \mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ na $\mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$ pro $n \in \mathbb{Z}$, $n < -1$,
- $\displaystyle\int x^\alpha \, \mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ na $(0, +\infty)$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,
- $\displaystyle\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \log|x|$ na $(0, +\infty)$ a na $(-\infty, 0)$,
- $\displaystyle\int e^x \, \mathrm{d}x \stackrel{c}{=} e^x$ na $\mathbb{R}$,

Primitivní funkce k některým důležitým funkcím

- $\displaystyle\int x^n \, \mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ na $\mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$ pro $n \in \mathbb{Z}$, $n < -1$,
- $\displaystyle\int x^\alpha \, \mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ na $(0, +\infty)$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,
- $\displaystyle\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \overset{c}{=} \log|x|$ na $(0, +\infty)$ a na $(-\infty, 0)$,
- $\displaystyle\int e^x \, \mathrm{d}x \overset{c}{=} e^x$ na $\mathbb{R}$,
- $\displaystyle\int \sin x \, \mathrm{d}x \overset{c}{=} -\cos x$ na $\mathbb{R}$,

Primitivní funkce k některým důležitým funkcím

- $\displaystyle\int x^n \,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ na $\mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$ pro $n \in \mathbb{Z}$, $n < -1$,
- $\displaystyle\int x^\alpha \,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ na $(0, +\infty)$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,
- $\displaystyle\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \log|x|$ na $(0, +\infty)$ a na $(-\infty, 0)$,
- $\displaystyle\int e^x \,\mathrm{d}x \overset{c}{=} e^x$ na $\mathbb{R}$,
- $\displaystyle\int \sin x \,\mathrm{d}x \overset{c}{=} -\cos x$ na $\mathbb{R}$,
- $\displaystyle\int \cos x \,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \sin x$ na $\mathbb{R}$,

- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \operatorname{tg} x$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,

- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \operatorname{tg} x$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} -\operatorname{cotg} x$ na každém z intervalů $(k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,

- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \operatorname{tg} x$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} -\operatorname{cotg} x$ na každém z intervalů $(k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,
- $\displaystyle\int \frac{1}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \operatorname{arctg} x$ na $\mathbb{R}$,

- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \operatorname{tg} x$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} -\operatorname{cotg} x$ na každém z intervalů $(k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \operatorname{arctg} x$ na $\mathbb{R}$,
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \arcsin x$ na $(-1, 1)$,

- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \operatorname{tg} x$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} -\operatorname{cotg} x$ na každém z intervalů $(k\pi, \pi+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \operatorname{arctg} x$ na $\mathbb{R}$,
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \arcsin x$ na $(-1,1)$,
- $\displaystyle\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \arccos x$ na $(-1,1)$.

Věta 5 (o substituci)

(i) *Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b). Nechť je φ funkce definovaná na (α,β) s hodnotami v intervalu (a,b), která má v každém bodě intervalu (α,β) vlastní derivaci. Pak*

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} F\big(\varphi(x)\big) \quad \textit{na } (\alpha,\beta).$$

Věta 5 (o substituci)

(i) *Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b). Nechť je φ funkce definovaná na (α,β) s hodnotami v intervalu (a,b), která má v každém bodě intervalu (α,β) vlastní derivaci. Pak*

$$\int f\bigl(\varphi(x)\bigr)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} F\bigl(\varphi(x)\bigr) \quad \textit{na } (\alpha,\beta).$$

(ii) *Nechť funkce φ má v každém bodě intervalu (α,β) vlastní derivaci, která je buď všude kladná, nebo všude záporná, a $\varphi\bigl((\alpha,\beta)\bigr)=(a,b)$. Nechť funkce f je definovaná na intervalu (a,b) a platí*

$$\int f\bigl(\varphi(t)\bigr)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \overset{c}{=} G(t) \quad \textit{na } (\alpha,\beta).$$

Pak

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} G\bigl(\varphi^{-1}(x)\bigr) \quad \textit{na } (a,b).$$

Věta 6 (integrace per partes)

Nechť I je neprázdný otevřený interval, funkce f a g jsou spojité na I, F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I. Pak platí

$$\int f(x)G(x)\,\mathrm{d}x = F(x)G(x) - \int F(x)g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{na } I.$$

Příklad

Označme $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n,\, x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$I_1 \stackrel{c}{=} \operatorname{arctg} x,\, x \in \mathbb{R}.$$

Definice

Racionální funkcí budeme rozumět podíl dvou polynomů, kde polynom ve jmenovateli není nulový.

Definice

Racionální funkcí budeme rozumět podíl dvou polynomů, kde polynom ve jmenovateli není nulový.

Věta („základní věta algebry“)

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. *Pak rovnice*

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

má alespoň jedno řešení $z \in \mathbb{C}$.

Lemma 7 (o dělení polynomů)

Nechť P a Q jsou dva polynomy (s komplexními koeficienty), přičemž polynom Q není nulový. Pak existují jednoznačně určené polynomy R a Z splňující:

- $\operatorname{st} Z < \operatorname{st} Q$,
- $P(x) = R(x)Q(x) + Z(x)$ *pro všechna* $x \in \mathbb{C}$.

Pokud mají P a Q reálné koeficienty, mají i R a Z reálné koeficienty.

Lemma 7 (o dělení polynomů)

Nechť P a Q jsou dva polynomy (s komplexními koeficienty), přičemž polynom Q není nulový. Pak existují jednoznačně určené polynomy R a Z splňující:

- $\operatorname{st} Z < \operatorname{st} Q$,
- $P(x) = R(x)Q(x) + Z(x)$ *pro všechna* $x \in \mathbb{C}$.

Pokud mají P a Q reálné koeficienty, mají i R a Z reálné koeficienty.

Důsledek

Je-li P polynom a $\lambda \in \mathbb{C}$ jeho kořen (tj. $P(\lambda) = 0$), pak existuje polynom R splňující $P(x) = (x - \lambda)R(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{C}$.

Věta 8 (rozklad na kořenové činitele)

Nechť $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ *je polynom stupně* $n \in \mathbb{N}$. *Pak existují čísla* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ *taková, že*

$$P(x) = a_n(x - x_1) \cdots (x - x_n), \quad x \in \mathbb{C}.$$

Věta 8 (rozklad na kořenové činitele)

Nechť $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ *je polynom stupně* $n \in \mathbb{N}$. *Pak existují čísla* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ *taková, že*

$$P(x) = a_n(x - x_1) \cdots (x - x_n), \quad x \in \mathbb{C}.$$

Definice

Nechť P je nenulový polynom, $\lambda \in \mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že λ je kořen násobnosti k polynomu P, jestliže existuje polynom R splňující $R(\lambda) \neq 0$ a $P(x) = (x - \lambda)^k R(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{C}$.

Věta 9 (o kořenech polynomu s reálnými koeficienty)

Nechť P je polynom s reálnými koeficienty a $\lambda \in \mathbb{C}$ *je kořen polynomu P násobnosti* $k \in \mathbb{N}$*. Pak i komplexně sdružené číslo* $\overline{\lambda}$ *je kořen polynomu P násobnosti k.*

Věta 10 (rozklad polynomu s reálnými koeficienty)

Nechť $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ *je polynom stupně* n *s reálnými koeficienty. Pak existují reálná čísla* $x_1, \ldots, x_k$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, $\beta_1, \ldots, \beta_l$ *a přirozená čísla* $p_1, \ldots, p_k$, $q_1, \ldots, q_l$ *taková, že*

- $P(x) = a_n (x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_k)^{p_k} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \cdots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,

Věta 10 (rozklad polynomu s reálnými koeficienty)

Nechť $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ *je polynom stupně* n *s reálnými koeficienty. Pak existují reálná čísla* $x_1, \ldots, x_k$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, $\beta_1, \ldots, \beta_l$ *a přirozená čísla* $p_1, \ldots, p_k$, $q_1, \ldots, q_l$ *taková, že*

- $P(x) = a_n (x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_k)^{p_k} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \cdots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,
- *žádné dva z polynomů* $x - x_1, x - x_2, \ldots, x - x_k$, $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \ldots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ *nemají společný kořen,*

Věta 10 (rozklad polynomu s reálnými koeficienty)

Nechť $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ *je polynom stupně* n *s reálnými koeficienty. Pak existují reálná čísla* $x_1, \dots, x_k$, $\alpha_1, \dots, \alpha_l$, $\beta_1, \dots, \beta_l$ *a přirozená čísla* $p_1, \dots, p_k$, $q_1, \dots, q_l$ *taková, že*

- $P(x) = a_n (x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_k)^{p_k} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \cdots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,
- *žádné dva z polynomů* $x - x_1, x - x_2, \dots, x - x_k$, $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ *nemají společný kořen,*
- *polynomy* $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ *nemají žádný reálný kořen.*

Věta 11 (rozklad na parciální zlomky)

Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$ *a nechť*

$$Q(x) = a_n(x-x_1)^{p_1} \cdots (x-x_k)^{p_k}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1} \cdots (x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}$$

je rozklad polynomu Q z Věty 10. Pak existují jednoznačně určená reálná čísla
$A_1^1, \dots, A_{p_1}^1, \dots, A_1^k, \dots, A_{p_k}^k,$
$B_1^1, C_1^1, \dots, B_{q_1}^1, C_{q_1}^1, \dots, B_1^l, C_1^l, \dots, B_{q_l}^l, C_{q_l}^l$ *taková, že platí*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} =$$

Věta 11 (rozklad na parciální zlomky)

Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$ a nechť

$$Q(x) = a_n(x-x_1)^{p_1}\cdots(x-x_k)^{p_k}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}\cdots(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}$$

je rozklad polynomu Q z Věty 10. Pak existují jednoznačně určená reálná čísla
$A_1^1,\dots,A_{p_1}^1,\dots,A_1^k,\dots,A_{p_k}^k$,
$B_1^1, C_1^1,\dots,B_{q_1}^1, C_{q_1}^1,\dots,B_1^l, C_1^l,\dots,B_{q_l}^l, C_{q_l}^l$ *taková, že platí*

$$\tfrac{P(x)}{Q(x)} = \tfrac{A_1^1}{(x-x_1)} + \cdots + \tfrac{A_{p_1}^1}{(x-x_1)^{p_1}} +$$

Věta 11 (rozklad na parciální zlomky)

Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$ a nechť

$$Q(x) = a_n(x-x_1)^{p_1} \cdots (x-x_k)^{p_k}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1} \cdots (x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}$$

je rozklad polynomu Q z Věty 10. Pak existují jednoznačně určená reálná čísla
$A_1^1, \dots, A_{p_1}^1, \dots, A_1^k, \dots, A_{p_k}^k,$
$B_1^1, C_1^1, \dots, B_{q_1}^1, C_{q_1}^1, \dots, B_1^l, C_1^l, \dots, B_{q_l}^l, C_{q_l}^l$ *taková, že platí*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^1}{(x-x_1)} + \cdots + \frac{A_{p_1}^1}{(x-x_1)^{p_1}} + \cdots + \frac{A_1^k}{(x-x_k)} + \cdots + \frac{A_{p_k}^k}{(x-x_k)^{p_k}} +$$

$$+$$

Věta 11 (rozklad na parciální zlomky)

Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$ *a nechť*

$$Q(x) = a_n(x-x_1)^{p_1}\cdots(x-x_k)^{p_k}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}\cdots(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}$$

je rozklad polynomu Q z Věty 10. Pak existují jednoznačně určená reálná čísla
$A_1^1, \dots, A_{p_1}^1, \dots, A_1^k, \dots, A_{p_k}^k,$
$B_1^1, C_1^1, \dots, B_{q_1}^1, C_{q_1}^1, \dots, B_1^l, C_1^l, \dots, B_{q_l}^l, C_{q_l}^l$ *taková, že platí*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^1}{(x-x_1)} + \cdots + \frac{A_{p_1}^1}{(x-x_1)^{p_1}} + \cdots + \frac{A_1^k}{(x-x_k)} + \cdots + \frac{A_{p_k}^k}{(x-x_k)^{p_k}} +$$
$$+ \frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)} + \cdots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}} + \cdots +$$
$$+$$

Věta 11 (rozklad na parciální zlomky)

Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$ a nechť

$$Q(x) = a_n(x-x_1)^{p_1} \cdots (x-x_k)^{p_k}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1} \cdots (x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}$$

je rozklad polynomu Q z Věty 10. Pak existují jednoznačně určená reálná čísla
$A_1^1, \dots, A_{p_1}^1, \dots, A_1^k, \dots, A_{p_k}^k,$
$B_1^1, C_1^1, \dots, B_{q_1}^1, C_{q_1}^1, \dots, B_1^l, C_1^l, \dots, B_{q_l}^l, C_{q_l}^l$ *taková, že platí*

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1^1}{(x-x_1)} + \cdots + \frac{A_{p_1}^1}{(x-x_1)^{p_1}} + \cdots + \frac{A_1^k}{(x-x_k)} + \cdots + \frac{A_{p_k}^k}{(x-x_k)^{p_k}} + \\ & + \frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)} + \cdots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}} + \cdots + \\ & + \frac{B_1^l x + C_1^l}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)} + \cdots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}}, \; x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_k\}.\end{aligned}$$

Poznámka

Označme

$$[F]_a^b = \begin{cases} \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x) & \text{pro } a < b, \\ \lim_{x\to b+} F(x) - \lim_{x\to a-} F(x) & \text{pro } b < a. \end{cases}$$

Pak lze Newtonův-Leibnizův vzorec zapsat jako

$$\int_a^b f = [F]_a^b$$

a to i pro $b < a$.

Věta 12 (integrace per partes)

Nechť funkce f, g, f' a g' jsou spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak platí

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'.$$

Věta 12 (integrace per partes)

Nechť funkce f, g, f' a g' jsou spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$.Pak platí

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'.$$

Věta 13 (substituce)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť dále funkce φ má na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ spojitou derivaci a zobrazuje jej do intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Věta (zavedení logaritmu)

Existuje jediná funkce log*, která má tyto vlastnosti:*

(L1) $D_{\log} = (0, +\infty)$,

(L2) log *je rostoucí na* $(0, +\infty)$,

(L3) $\log(xy) = \log x + \log y$ *pro všechna* $x, y \in (0, +\infty)$,

(L4) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$.

VIII.3. Zobecněný Riemannův integrál

VIII.3. Zobecněný Riemannův integrál

Lemma 14 (spojitost Riemannova integrálu)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a funkce f má na intervalu $\langle a, b\rangle$ Riemannův integrál. Pak platí

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b-} \int_a^x f = \lim_{x \to a+} \int_x^b f.$$

Lemma 15

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a funkce f má Riemannův integrál na každém podintervalu $\langle x, y \rangle \subset (a, b)$.

Lemma 15

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$*,* $a < b$*, a funkce* f *má Riemannův integrál na každém podintervalu* $\langle x, y \rangle \subset (a, b)$*. Nechť dále* $c \in (a, b)$*, existují limity* $\lim_{x \to a+} \int_x^c f$ *a* $\lim_{y \to b-} \int_c^y f$ *a jejich součet má smysl (tj. je definovaný).*

Lemma 15

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, *a funkce* f *má Riemannův integrál na každém podintervalu* $\langle x, y\rangle \subset (a, b)$. *Nechť dále* $c \in (a, b)$, *existují limity* $\lim_{x\to a+} \int_x^c f$ *a* $\lim_{y\to b-} \int_c^y f$ *a jejich součet má smysl (tj. je definovaný). Pak pro každé* $d \in (a, b)$ *existují* $\lim_{x\to a+} \int_x^d f$ *a* $\lim_{y\to b-} \int_d^y f$ *a platí*

$$\lim_{x\to a+} \int_x^d f + \lim_{y\to b-} \int_d^y f = \lim_{x\to a+} \int_x^c f + \lim_{y\to b-} \int_c^y f.$$

Definice

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť funkce f je definovaná na intervalu (a, b). Má-li funkce f Riemannův integrál na každém podintervalu $\langle x, y \rangle \subset (a, b)$ a existuje-li $c \in (a, b)$ takové, že limity $\lim_{x \to a+} \int_x^c f$ a $\lim_{y \to b-} \int_c^y f$ existují a jejich součet má smysl, pak definujeme zobecněný Riemannův integrál funkce f na intervalu (a, b) jako

$$\int_a^b f = \lim_{x \to a+} \int_x^c f + \lim_{y \to b-} \int_c^y f.$$

Poznámka

- Definice je korektní, neboť hodnota součtu $\lim_{x \to a+} \int_x^c f + \lim_{y \to b-} \int_c^y f$ nezávisí na volbě dělícího bodu $c \in (a, b)$.

Poznámka

- Definice je korektní, neboť hodnota součtu $\lim_{x \to a+} \int_x^c f + \lim_{y \to b-} \int_c^y f$ nezávisí na volbě dělícího bodu $c \in (a, b)$.
- Má-li funkce f Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b \rangle$, má i zobecněný Riemannův integrál na intervalu (a, b) a oba integrály jsou si rovny.

Poznámka

- Definice je korektní, neboť hodnota součtu $\lim_{x\to a+}\int_x^c f + \lim_{y\to b-}\int_c^y f$ nezávisí na volbě dělícího bodu $c \in (a,b)$.
- Má-li funkce f Riemannův integrál na intervalu $\langle a,b\rangle$, má i zobecněný Riemannův integrál na intervalu (a,b) a oba integrály jsou si rovny.
- Hodnota zobecněného Riemannova integrálu může být i $+\infty$ nebo $-\infty$.

Lemma 16

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a < b$*, a funkce* f *je omezená na intervalu* $\langle a, b\rangle$*. Jestliže existuje Riemannův integrál funkce* f *na každém podintervalu* $\langle c, d\rangle \subset (a, b)$*, pak existuje i Riemannův integrál funkce* f *na intervalu* $\langle a, b\rangle$*.*

Lemma 16

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a funkce f je omezená na intervalu $\langle a, b \rangle$. Jestliže existuje Riemannův integrál funkce f na každém podintervalu $\langle c, d \rangle \subset (a, b)$, pak existuje i Riemannův integrál funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Lemma 17

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, f je nezáporná na (a, b) a f má Riemannův integrál na každém podintervalu $\langle x, y \rangle \subset (a, b)$. Potom f má zobecněný Riemannův integrál na (a, b).

Věta 18

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$ *a* $c \in (a, b)$*.*

(i) *Jestliže funkce* f *má zobecněný Riemannův integrál na* (a, b)*, pak má* f *zobecněný Riemannův integrál i na* (a, c) *a* (c, b) *a platí*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Věta 18

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$ *a* $c \in (a, b)$.

(i) *Jestliže funkce* f *má zobecněný Riemannův integrál na* (a, b), *pak má* f *zobecněný Riemannův integrál i na* (a, c) *a* (c, b) *a platí*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

(ii) *Nechť funkce* f *má zobecněný Riemannův integrál na* (a, c) *a* (c, b), f *je omezená na nějakém okolí bodu* c *a součet* $\int_a^c f + \int_c^b f$ *má smysl. Pak* f *má zobecněný Riemannův integrál na* (a, b) *a platí*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Věta 19 (linearita zobec. Riemannova integrálu)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, f a g jsou funkce mající zobecněný Riemannův integrál na intervalu (a, b) a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom

(i) *funkce αf má zobecněný Riemannův integrál na (a, b) a platí*

$$\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f,$$

má-li pravá strana smysl,

Věta 19 (linearita zobec. Riemannova integrálu)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, f a g jsou funkce mající zobecněný Riemannův integrál na intervalu (a, b) a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom

(i) *funkce αf má zobecněný Riemannův integrál na (a, b) a platí*
$$\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f,$$
má-li pravá strana smysl,

(ii) *je-li součet $\int_a^b f + \int_a^b g$ definovaný, pak má funkce $f + g$ zobecněný Riemannův integrál na (a, b) a platí*
$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Věta 20

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť f a g jsou funkce mající zobecněný Riemannův integrál na intervalu (a, b). Potom platí:

(i) *Je-li $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in (a, b)$, pak*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Věta 20

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť f a g jsou funkce mající zobecněný Riemannův integrál na intervalu (a, b). Potom platí:

(i) *Je-li $f(x) \le g(x)$ pro každé $x \in (a, b)$, pak*

$$\int_a^b f \le \int_a^b g.$$

(ii) *Funkce $|f|$ má zobecněný Riemannův integrál na (a, b) a platí*

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f| \,.$$

Věta 21 (Newtonův vzorec)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, f je spojitá na (a, b), a F je primitivní funkce k f na (a, b). Pak zobecněný Riemannův integrál funkce f na (a, b) existuje právě když existují limity $\lim_{x\to a+} F(x)$ a $\lim_{x\to b-} F(x)$ a jejich rozdíl má smysl. V tomto případě platí

$$\int_a^b f = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x).$$

Pokud existuje zobecněný Riemannův integrál funkce f na intervalu (a, b) a přitom je konečný, pak říkáme, že $\int_a^b f$ konverguje. Pokud je roven $+\infty$ nebo $-\infty$, pak říkáme, že diverguje. Máme pak následující možnosti:

$$\int_a^b f \begin{cases} \text{existuje a je roven} \begin{cases} \text{reálnému číslu, tj. konverguje,} \\ +\infty \text{ nebo } -\infty\text{, tj. diverguje,} \end{cases} \\ \\ \text{neexistuje.} \end{cases}$$

Věta 22 (srovnávací kritérium)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, funkce f a g splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$ a f je na (a, b) spojitá. Pokud konverguje $\int_a^b g$, pak konverguje i $\int_a^b f$.

Věta 22 (srovnávací kritérium)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, funkce f a g splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$ a f je na (a, b) spojitá. Pokud konverguje $\int_a^b g$, pak konverguje i $\int_a^b f$.

Věta 23 (limitní srovnávací kritérium)

Nechť f a g jsou spojité nezáporné funkce na intervalu $\langle a, b)$, $b \in \mathbb{R}^*$, a existuje limita $\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma \in \mathbb{R}^*$.

- *Je-li $\gamma \in (0, +\infty)$, pak $\int_a^b f$ konverguje, právě když konverguje $\int_a^b g$.*
- *Je-li $\gamma = 0$, pak z konvergence $\int_a^b g$ plyne konvergence $\int_a^b f$.*
- *Je-li $\gamma = +\infty$, pak z divergence $\int_a^b g$ plyne divergence $\int_a^b f$.*

VIII.4. Míra a integrál v $\mathbb{R}^n$

Definice

Nechť $\mathcal{A}$ je nějaký systém podmnožin $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\mathcal{A}$ je σ-algebra, jestliže platí:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(ii) je-li $A \in \mathcal{A}$, pak také $\mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{A}$,

(iii) jsou-li $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, pak také $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

Definice

Nechť $\mathcal{A}$ je nějaký systém podmnožin $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\mathcal{A}$ je σ-algebra, jestliže platí:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(ii) je-li $A \in \mathcal{A}$, pak také $\mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{A}$,

(iii) jsou-li $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, pak také $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

Definice

Nechť $\mathcal{A}$ je σ-algebra podmnožin $\mathbb{R}^n$. Zobrazení $\mu\colon \mathcal{A} \to \langle 0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ se nazývá míra, jestliže $\mu(\emptyset) = 0$, a jestliže je σ-aditivní, tj. pokud $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ jsou po dvou disjunktní, pak $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$.

Definice

Nechť $\mathcal{A}$ je nějaký systém podmnožin $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\mathcal{A}$ je σ-algebra, jestliže platí:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(ii) je-li $A \in \mathcal{A}$, pak také $\mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{A}$,

(iii) jsou-li $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, pak také $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

Definice

Nechť $\mathcal{A}$ je σ-algebra podmnožin $\mathbb{R}^n$. Zobrazení $\mu\colon \mathcal{A} \to \langle 0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ se nazývá míra, jestliže $\mu(\emptyset) = 0$, a jestliže je σ-aditivní, tj. pokud $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ jsou po dvou disjunktní, pak $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$.

Množinám z $\mathcal{A}$ se říká měřitelné (případně μ-měřitelné) množiny.

Věta 24

Existuje právě jedna σ-algebra Λ na $\mathbb{R}^n$ a právě jedna míra λ na Λ mající následující vlastnosti:

(i) *Λ obsahuje všechny otevřené podmnožiny $\mathbb{R}^n$;*

(ii) *jestliže $A, B \in \Lambda$, $A \subset E \subset B$, a $\lambda(B \setminus A) = 0$, pak $E \in \Lambda$;*

(iii) *je-li $I = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle \subset \mathbb{R}^n$, pak $\lambda(I) = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j)$;*

(iv) *λ je translačně invariantní, tj. $\lambda(x + A) = \lambda(A)$ pro každou $A \in \Lambda$ a $x \in \mathbb{R}^n$;*

(v) *λ je regulární, tj. jestliže $A \in \Lambda$ pak pro každé $\epsilon > 0$ existují F uzavřená podmnožina A a G otevřená nadmnožina A, že $\lambda(G \setminus F) < \epsilon$.*

Míra λ z předchozí věty se nazývá Lebesgueova míra a množinám v Λ se říká lebesgueovsky měřitelné množiny.

Míra λ z předchozí věty se nazývá Lebesgueova míra a množinám v Λ se říká lebesgueovsky měřitelné množiny.

Příklad

Příklady lebesgueovsky měřitelných množin:

- otevřené a uzavřené množiny,
- konvexní množiny,
- konečné množiny,
- $\{x_k \in \mathbb{R}^n;\ k \in \mathbb{N}\}$, tj. množina všech členů nějaké posloupnosti v $\mathbb{R}^n$.

Příklad

Příklady množin nulové míry v $\mathbb{R}^n$:

- konečné množiny,
- $\{x_k \in \mathbb{R}^n;\ k \in \mathbb{N}\}$, tj. množina všech členů nějaké posloupnosti v $\mathbb{R}^n$,
- nadroviny v $\mathbb{R}^n$,
- grafy spojitých funkcí z $\mathbb{R}^{n-1}$ do $\mathbb{R}$,
- hranice konvexních množin,
- Cantorovo diskontinuum v $\mathbb{R}$.

Příklad

Příklady množin nulové míry v $\mathbb{R}^n$:

- konečné množiny,
- $\{x_k \in \mathbb{R}^n;\ k \in \mathbb{N}\}$, tj. množina všech členů nějaké posloupnosti v $\mathbb{R}^n$,
- nadroviny v $\mathbb{R}^n$,
- grafy spojitých funkcí z $\mathbb{R}^{n-1}$ do $\mathbb{R}$,
- hranice konvexních množin,
- Cantorovo diskontinuum v $\mathbb{R}$.

Je-li $V(x),\ x \in \mathbb{R}^n$ výroková forma, pak říkáme, že $V(x)$ platí pro „skoro všechna x“ nebo „skoro všude“, jestliže existuje množina E nulové míry taková, že $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus E\colon\ V(x)$.

Definice

Pro $A \subset \mathbb{R}^n$ definujeme charakteristickou funkci množiny A takto:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus A. \end{cases}$$

Definice

Pro $A \subset \mathbb{R}^n$ definujeme charakteristickou funkci množiny A takto:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus A. \end{cases}$$

Nechť $A_1, \dots, A_k \subset \mathbb{R}^n$ a $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$. Funkci tvaru $\sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{A_j}$ nazýváme jednoduchou funkcí.

Definice

Pro $A \subset \mathbb{R}^n$ definujeme charakteristickou funkci množiny A takto:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus A. \end{cases}$$

Nechť $A_1, \ldots, A_k \subset \mathbb{R}^n$ a $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$. Funkci tvaru $\sum_{j=1}^k c_j \chi_{A_j}$ nazýváme jednoduchou funkcí. Jsou-li navíc $A_1, \ldots, A_k \in \Lambda$, pak funkci $\sum_{j=1}^k c_j \chi_{A_j}$ nazýváme jednoduchou měřitelnou funkcí.

Definice

Zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ nazýváme numerickou funkcí.

Definice

Zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ nazýváme numerickou funkcí. Řekneme, že numerická funkce f je měřitelná, jestliže existuje posloupnost jednoduchých měřitelných funkcí $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ taková, že pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ platí $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$.

Definice

Zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ nazýváme numerickou funkcí. Řekneme, že numerická funkce f je měřitelná, jestliže existuje posloupnost jednoduchých měřitelných funkcí $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ taková, že pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ platí $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$.

Definice

Je-li $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ posloupnost numerických funkcí, řekneme že numerická funkce f je bodovou limitou posloupnosti $\{f_j\}$, jestliže pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$. Značíme $\lim_{j\to\infty} f_j = f$ nebo $f_j \to f$.

Věta 25 (vlastnosti měřitelných funkcí)

Měřitelné funkce mají následující vlastnosti:

(i) *Jsou-li f, g měřitelné a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak i αf, $f + g$, fg, $\frac{f}{g}$ jsou měřitelné, pokud jsou definované na celém $\mathbb{R}^n$.*

(ii) *Jsou-li f, g měřitelné, pak i $\max\{f, g\}$ a $\min\{f, g\}$ jsou měřitelné.*

(iii) *Je-li f reálná měřitelná a g reálná spojitá, pak $g \circ f$ je měřitelná.*

(iv) *Je-li $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ posloupnost měřitelných funkcí s bodovou limitou f, pak f je také měřitelná.*

(v) *Spojité funkce jsou měřitelné.*

Definice

Pro jednoduchou nezápornou měřitelnou funkci $\sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{A_j}$ definujeme její **Lebesgueův integrál** jako

$$\int \sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{A_j} \,\mathrm{d}\lambda = \sum_{j=1}^{k} c_j \lambda(A_j),$$

kde používáme konvenci $0 \cdot (+\infty) = 0$.

Definice

Pro nezápornou měřitelnou funkci definujeme

$$\int f \,\mathrm{d}\lambda =$$

$$= \sup \left\{ \int g \,\mathrm{d}\lambda;\ g \leq f,\ g \text{ je jednoduchá nezáporná měřitelná} \right\}$$

Definice

Pro nezápornou měřitelnou funkci definujeme

$$\int f \, \mathrm{d}\lambda =$$

$$= \sup \left\{ \int g \, \mathrm{d}\lambda; \ g \leq f, \ g \text{ je jednoduchá nezáporná měřitelná} \right\}$$

Konečně pro měřitelnou funkci f definujeme

$$\int f \, \mathrm{d}\lambda = \int f^+ \, \mathrm{d}\lambda - \int f^- \, \mathrm{d}\lambda,$$

pokud je rozdíl definován.

Definice

Pro nezápornou měřitelnou funkci definujeme

$$\int f \,\mathrm{d}\lambda =$$
$$= \sup \left\{ \int g \,\mathrm{d}\lambda;\; g \leq f,\; g \text{ je jednoduchá nezáporná měřitelná} \right\}$$

Konečně pro měřitelnou funkci f definujeme

$$\int f \,\mathrm{d}\lambda = \int f^+ \,\mathrm{d}\lambda - \int f^- \,\mathrm{d}\lambda,$$

pokud je rozdíl definován.
Říkáme, že funkce f je (lebesgueovsky) integrovatelná,
pokud má konečný Lebesgueův integrál.

Definice

Je-li $M \subset \mathbb{R}^n$ měřitelná množina a f měřitelná funkce, pak definujeme

$$\int_M f \, \mathrm{d}\lambda = \int \chi_M f \, \mathrm{d}\lambda.$$

Věta 26 (vlastnosti Lebesgueova integrálu)

Nechť M je měřitelná množina a f, g jsou měřitelné funkce.

(i) *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak $\int_M \alpha f \,\mathrm{d}\lambda = \alpha \int_M f \,\mathrm{d}\lambda$ a $\int_M (f+g) \,\mathrm{d}\lambda = \int_M f \,\mathrm{d}\lambda + \int_M g \,\mathrm{d}\lambda$, pokud jsou výrazy napravo definovány.*

(ii) *Platí-li $f \leq g$ skoro všude na M, pak $\int_M f \,\mathrm{d}\lambda \leq \int_M g \,\mathrm{d}\lambda$, pokud oba integrály existují.*

(iii) *Jestliže $\int_M f \,\mathrm{d}\lambda$ existuje, pak existuje i $\int_M |f| \,\mathrm{d}\lambda$ a platí $\left|\int_M f \,\mathrm{d}\lambda\right| \leq \int_M |f| \,\mathrm{d}\lambda$.*

(iv) *Je-li $f = 0$ skoro všude na M, pak $\int_M f \,\mathrm{d}\lambda = 0$.*

(v) *Je-li $f = g$ skoro všude na M, pak $\int_M f \,\mathrm{d}\lambda = \int_M g \,\mathrm{d}\lambda$, pokud alespoň jeden z integrálů existuje.*

Věta 27 (souvislost s Riemannovým integrálem)

(i) *Jestliže existuje Riemannův integrál* $\int_a^b f$*, pak existuje i Lebesgueův integrál* $\int_{(a,b)} f \, \mathrm{d}\lambda$ *a oba integrály se rovnají.*

Věta 27 (souvislost s Riemannovým integrálem)

(i) *Jestliže existuje Riemannův integrál $\int_a^b f$, pak existuje i Lebesgueův integrál $\int_{(a,b)} f \,\mathrm{d}\lambda$ a oba integrály se rovnají.*

(ii) *Je-li f omezená na $\langle a, b\rangle$, pak její Riemannův integrál existuje, právě když je skoro všude spojitá.*

Věta 27 (souvislost s Riemannovým integrálem)

(i) *Jestliže existuje Riemannův integrál $\int_a^b f$, pak existuje i Lebesgueův integrál $\int_{(a,b)} f \, \mathrm{d}\lambda$ a oba integrály se rovnají.*

(ii) *Je-li f omezená na $\langle a, b\rangle$, pak její Riemannův integrál existuje, právě když je skoro všude spojitá.*

(iii) *Je-li f spojitá nezáporná funkce na (a, b), pak $\int_{(a,b)} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_a^b f$, kde vpravo je zobecněný Riemannův integrál.*

Příklad

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je omezená otevřená nebo uzavřená množina a f je omezená spojitá funkce na M. Pak f je integrovatelná na M.

Příklad

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je omezená otevřená nebo uzavřená množina a f je omezená spojitá funkce na M. Pak f je integrovatelná na M.

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je omezená konvexní otevřená množina a f je spojitá funkce na $\overline{M}$. Pak f je integrovatelná na M i na $\overline{M}$ a platí $\int_M f \, \mathrm{d}\lambda = \int_{\overline{M}} f \, \mathrm{d}\lambda$.

Věta 28 (Fubiniova)

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$ a $f\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ je integrovatelná funkce. Pro každé $x \in \mathbb{R}^m$ definujme funkci $f_x\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ předpisem $f_x(y) = f(x, y)$. Pak pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^m$ je funkce f_x integrovatelná a platí

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_x(y) \,\mathrm{d}\lambda(y) \right) \,\mathrm{d}\lambda(x). \tag{1}$$

Věta 28 (Fubiniova)

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$ a $f\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ je integrovatelná funkce. Pro každé $x \in \mathbb{R}^m$ definujme funkci $f_x\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ předpisem $f_x(y) = f(x, y)$. Pak pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^m$ je funkce f_x integrovatelná a platí

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_x(y) \, \mathrm{d}\lambda(y) \right) \mathrm{d}\lambda(x). \qquad (1)$$

Poznámka

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$ a $f\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^*$ je nezáporná měřitelná funkce. Pro každé $x \in \mathbb{R}^m$ definujme funkci $f_x\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ předpisem $f_x(y) = f(x, y)$. Pak pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^m$ je funkce f_x měřitelná a platí opět vzorec (1). Zde ovšem může být integrál $\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f \, \mathrm{d}\lambda$ nekonečný.

Věta 29 (o substituci)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, funkce $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C^1(G)$ a zobrazení $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ definované předpisem $\varphi(x) = [\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)]$ nechť je prosté. Dále předpokládejme, že determinant (tzv. jakobián)

$$J_\varphi(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(x) \end{vmatrix}$$

je nenulový v každém bodě $x \in G$. Pak $\varphi(G)$ je otevřená a pro každou měřitelnou $M \subset \varphi(G)$ a každou $f\colon G \to \mathbb{R}^*$ platí

$$\int_M f \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\varphi^{-1}(M)} f\big(\varphi(x)\big)\, |J_\varphi(x)| \,\mathrm{d}\lambda(x),$$

pokud je alespoň jeden z těchto integrálů definován.

IX.1. Vektorové prostory

IX.1. Vektorové prostory

Symbol $\mathbb{K}$ značí množinu $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

Definice

Vektorovým prostorem nad $\mathbb{K}$ rozumíme trojici $(V, +, \cdot)$, kde V je neprázdná množina, $+$ je operace z $V \times V$ do V a $\cdot$ je operace z $\mathbb{K} \times V$ do V, přičemž tyto operace mají následující vlastnosti:

Definice

- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V\colon \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (komutativita sčítání),

Definice

- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V\colon \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (komutativita sčítání),
- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V\colon (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ (asociativita sčítání),

Definice

- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V\colon \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (komutativita sčítání),
- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V\colon (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ (asociativita sčítání),
- množina V obsahuje prvek, který značíme $\boldsymbol{o}$ (a říkáme mu nulový prvek), splňující

$$\forall \boldsymbol{v} \in V\colon \boldsymbol{o} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}.$$

Definice

- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V \colon \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (komutativita sčítání),
- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V \colon (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ (asociativita sčítání),
- množina V obsahuje prvek, který značíme $\boldsymbol{o}$ (a říkáme mu nulový prvek), splňující
$$\forall \boldsymbol{v} \in V \colon \boldsymbol{o} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}.$$
- $\forall \boldsymbol{v} \in V\ \exists \boldsymbol{w} \in V \colon \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}$,

Definice

- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V \colon \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (komutativita sčítání),
- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V \colon (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ (asociativita sčítání),
- množina V obsahuje prvek, který značíme $\boldsymbol{o}$ (a říkáme mu nulový prvek), splňující

$$\forall \boldsymbol{v} \in V \colon \boldsymbol{o} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}.$$

- $\forall \boldsymbol{v} \in V \; \exists \boldsymbol{w} \in V \colon \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}$,
- $\forall a, b \in \mathbb{K} \; \forall \boldsymbol{v} \in V \colon a \cdot (b \cdot \boldsymbol{v}) = (ab) \cdot \boldsymbol{v}$,

Definice

- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V\colon \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (komutativita sčítání),
- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V\colon (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ (asociativita sčítání),
- množina V obsahuje prvek, který značíme $\boldsymbol{o}$ (a říkáme mu nulový prvek), splňující

$$\forall \boldsymbol{v} \in V\colon \boldsymbol{o} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}.$$

- $\forall \boldsymbol{v} \in V\ \exists \boldsymbol{w} \in V\colon \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}$,
- $\forall a, b \in \mathbb{K}\ \forall \boldsymbol{v} \in V\colon a \cdot (b \cdot \boldsymbol{v}) = (ab) \cdot \boldsymbol{v}$,
- $\forall a, b \in \mathbb{K}\ \forall \boldsymbol{v} \in V\colon (a + b) \cdot \boldsymbol{v} = a \cdot \boldsymbol{v} + b \cdot \boldsymbol{v}$,

Definice

- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V\colon \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (komutativita sčítání),
- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V\colon (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ (asociativita sčítání),
- množina V obsahuje prvek, který značíme $\boldsymbol{o}$ (a říkáme mu nulový prvek), splňující

$$\forall \boldsymbol{v} \in V\colon \boldsymbol{o} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}.$$

- $\forall \boldsymbol{v} \in V \; \exists \boldsymbol{w} \in V\colon \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}$,
- $\forall a, b \in \mathbb{K} \; \forall \boldsymbol{v} \in V\colon a \cdot (b \cdot \boldsymbol{v}) = (ab) \cdot \boldsymbol{v}$,
- $\forall a, b \in \mathbb{K} \; \forall \boldsymbol{v} \in V\colon (a + b) \cdot \boldsymbol{v} = a \cdot \boldsymbol{v} + b \cdot \boldsymbol{v}$,
- $\forall a \in \mathbb{K} \; \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V\colon a \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a \cdot \boldsymbol{u} + a \cdot \boldsymbol{v}$,

Definice

- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V \colon \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (komutativita sčítání),
- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V \colon (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ (asociativita sčítání),
- množina V obsahuje prvek, který značíme $\boldsymbol{o}$ (a říkáme mu nulový prvek), splňující

$$\forall \boldsymbol{v} \in V \colon \boldsymbol{o} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}.$$

- $\forall \boldsymbol{v} \in V \; \exists \boldsymbol{w} \in V \colon \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}$,
- $\forall a, b \in \mathbb{K} \; \forall \boldsymbol{v} \in V \colon a \cdot (b \cdot \boldsymbol{v}) = (ab) \cdot \boldsymbol{v}$,
- $\forall a, b \in \mathbb{K} \; \forall \boldsymbol{v} \in V \colon (a + b) \cdot \boldsymbol{v} = a \cdot \boldsymbol{v} + b \cdot \boldsymbol{v}$,
- $\forall a \in \mathbb{K} \; \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V \colon a \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a \cdot \boldsymbol{u} + a \cdot \boldsymbol{v}$,
- $\forall \boldsymbol{v} \in V \colon 1 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$.

Definice

Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $U \subset V$, $U \neq \emptyset$. Řekneme, že U je vektorový podprostor prostoru V, jestliže

- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U \colon \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$,

Definice

Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $U \subset V$, $U \neq \emptyset$. Řekneme, že U je vektorový podprostor prostoru V, jestliže

- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U \colon \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$,
- $\forall a \in \mathbb{K}\ \forall \boldsymbol{u} \in U \colon a \cdot \boldsymbol{u} \in U$.

Definice

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $k \in \mathbb{N}$ a $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \in V$. Řekneme, že vektor $\boldsymbol{u} \in V$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ s koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, jestliže

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k.$$

V tomto případě také říkáme, že lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ s koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ je rovna $\boldsymbol{u}$.

Definice

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $k \in \mathbb{N}$ a $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \in V$. Řekneme, že vektor $\boldsymbol{u} \in V$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ s koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, jestliže

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k.$$

V tomto případě také říkáme, že lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ s koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ je rovna $\boldsymbol{u}$. Pokud $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$, pak mluvíme o triviální lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$; je-li některý koeficient nenulový, pak mluvíme o netriviální lineární kombinaci.

Definice

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ jsou pevně zvolené vektory z V. Podprostor $\operatorname{lin}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ nazýváme vektorovým podprostorem generovaným vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$. Z formálních důvodů dále klademe $\operatorname{lin}_{\mathbb{K}} \emptyset = \{\boldsymbol{o}\}$.

Definice

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m \in V$ jsou lineárně závislé, pokud existuje jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru. Pokud vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m$ nejsou lineárně závislé, říkáme, že jsou lineárně nezávislé.

Definice

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m \in V$ jsou lineárně závislé, pokud existuje jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru. Pokud vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ nejsou lineárně závislé, říkáme, že jsou lineárně nezávislé.

Definice

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Množina $M \subset V$ je lineárně nezávislá, jestliže pro každé $k \in \mathbb{N}$ je libovolná k-tice po dvou různých vektorů z M lineárně nezávislá.

Definice

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Říkáme, že množina $B \subset V$ je báze prostoru V, jestliže

(i) B je lineárně nezávislá množina,

Definice

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Říkáme, že množina $B \subset V$ je **báze** prostoru V, jestliže

(i) B je lineárně nezávislá množina,

(ii) každý vektor z V lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z B.

Věta 30

(i) *Každou lineárně nezávislou podmnožinu vektorového prostoru lze doplnit na bázi tohoto prostoru.*

Věta 30

(i) *Každou lineárně nezávislou podmnožinu vektorového prostoru lze doplnit na bázi tohoto prostoru.*

(ii) *Každý vektorový prostor má bázi.*

Věta 30

(i) *Každou lineárně nezávislou podmnožinu vektorového prostoru lze doplnit na bázi tohoto prostoru.*

(ii) *Každý vektorový prostor má bázi.*

(iii) *Počet prvků báze prostoru V je určen jednoznačně a nazýváme ho dimenze prostoru V (značíme $\dim V$).*

Věta 30

(i) *Každou lineárně nezávislou podmnožinu vektorového prostoru lze doplnit na bázi tohoto prostoru.*

(ii) *Každý vektorový prostor má bázi.*

(iii) *Počet prvků báze prostoru V je určen jednoznačně a nazýváme ho dimenze prostoru V (značíme $\dim V$).*

Definice

Je-li $\dim V < +\infty$, řekneme, že V je konečněrozměrný (konečnědimenzionální). Je-li $\dim V = +\infty$, mluvíme o nekonečněrozměrném (nekonečnědimenzionálním) vektorovém prostoru.

Tvrzení 31

Nechť V je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ nad $\mathbb{K}$.

(i) *Jsou-li $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ lineárně nezávislé vektory v prostoru V, pak množina $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ je bází prostoru V.*

Tvrzení 31

Nechť V je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ nad $\mathbb{K}$.

(i) *Jsou-li $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ lineárně nezávislé vektory v prostoru V, pak množina $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ je bází prostoru V.*

(ii) *Jestliže pro vektory $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \in V$ platí $\operatorname{lin}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\} = V$, je množina $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ bází prostoru V.*

IX.2. Lineární zobrazení a řešení soustav lineárních rovnic

IX.2. Lineární zobrazení a řešení soustav lineárních rovnic

Definice

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$. Zobrazení $L\colon U \to V$ se nazývá lineární, jestliže platí:

- $\forall \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U\colon L(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = L(\boldsymbol{u}_1) + L(\boldsymbol{u}_2)$,

IX.2. Lineární zobrazení a řešení soustav lineárních rovnic

Definice

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$. Zobrazení $L\colon U \to V$ se nazývá lineární, jestliže platí:

- $\forall \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U\colon L(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = L(\boldsymbol{u}_1) + L(\boldsymbol{u}_2)$,
- $\forall a \in \mathbb{K}\ \forall \boldsymbol{u} \in U\colon L(a\boldsymbol{u}) = aL(\boldsymbol{u})$.

Definice

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$, $L\colon U \to V$ nechť je lineární zobrazení. Jádrem lineárního zobrazení L nazveme množinu

$$\mathrm{Ker}(L) = L^{-1}(\{\boldsymbol{o}\}) = \{\boldsymbol{u} \in U\colon L(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}\}.$$

Definice

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$, $L\colon U \to V$ nechť je lineární zobrazení. Jádrem lineárního zobrazení L nazveme množinu

$$\mathrm{Ker}(L) = L^{-1}(\{\boldsymbol{o}\}) = \{\boldsymbol{u} \in U\colon L(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}\}.$$

Symbolem $\mathrm{Im}(L)$ značíme obor hodnot zobrazení L, tedy

$$\mathrm{Im}\, L = L(U) = \{\boldsymbol{v} \in V;\ \exists \boldsymbol{u} \in U\colon L(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}\}.$$

Věta 32

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$, $L\colon U \to V$ nechť je lineární zobrazení. Potom platí:

(i) *Množina* $\mathrm{Ker}(L)$ *je vektorovým podprostorem U.*

Věta 32

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$, $L\colon U \to V$ nechť je lineární zobrazení. Potom platí:

(i) *Množina* $\operatorname{Ker}(L)$ *je vektorovým podprostorem U.*

(ii) *Množina* $\operatorname{Im}(L)$ *je vektorovým podprostorem V.*

Věta 32

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$, $L\colon U \to V$ nechť je lineární zobrazení. Potom platí:

(i) *Množina* $\operatorname{Ker}(L)$ *je vektorovým podprostorem U.*

(ii) *Množina* $\operatorname{Im}(L)$ *je vektorovým podprostorem V.*

(iii) *Platí* $\dim \operatorname{Ker}(L) + \dim \operatorname{Im}(L) = \dim U$.

Nechť U, V jsou vektorové prostory, $L\colon U \to V$ je lineární zobrazení a $\boldsymbol{b} \in V$. Uvažujme rovnici

$$L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}. \tag{2}$$

Nechť U, V jsou vektorové prostory, $L\colon U \to V$ je lineární zobrazení a $\boldsymbol{b} \in V$. Uvažujme rovnici

$$L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}. \tag{2}$$

Věta 33

Nechť $\boldsymbol{x}_0 \in U$ je řešením rovnice (2). Potom množina

$$\{\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{w}\colon \boldsymbol{w} \in \mathrm{Ker}(L)\}$$

je množinou všech řešení rovnice (2).

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(m \times n)$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Uvažujme soustavu m rovnic o n neznámých

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}. \tag{3}$$

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(m \times n)$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Uvažujme soustavu m rovnic o n neznámých

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}. \tag{3}$$

Důsledek 34

Má-li soustava (3) *řešení* $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, *pak množina všech řešení má tvar*

$$\{\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{w} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}\}.$$

IX.3. Kvadratické formy

IX.3. Kvadratické formy

Definice

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$. Platí-li $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$, pak říkáme, že matice $\boldsymbol{A}$ je symetrická.

IX.3. Kvadratické formy

Definice

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$. Platí-li $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$, pak říkáme, že matice $\boldsymbol{A}$ je symetrická.

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ je symetrická matice. Pak funkci $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definované předpisem $\varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{u}$ říkáme kvadratická forma. Říkáme, že tato forma je reprezentována maticí $\boldsymbol{A}$ nebo že matice $\boldsymbol{A}$ je reprezentující maticí formy φ.

IX.3. Kvadratické formy

Definice

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$. Platí-li $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$, pak říkáme, že matice $\boldsymbol{A}$ je symetrická.
Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ je symetrická matice. Pak funkci $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definované předpisem $\varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{u}$ říkáme kvadratická forma. Říkáme, že tato forma je reprezentována maticí $\boldsymbol{A}$ nebo že matice $\boldsymbol{A}$ je reprezentující maticí formy φ.

Poznámka

Je-li $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratická forma, pak pro každé $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}$ platí $\varphi(c\boldsymbol{u}) = c^2\varphi(\boldsymbol{u})$. To plyne z definice maticového násobení.

Definice

Nechť $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je kvadratická forma. Řekneme, že φ je

- pozitivně definitní (PD), jestliže
  $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}\colon \varphi(\boldsymbol{u}) > 0$,

Definice

Nechť $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je kvadratická forma. Řekneme, že φ je

- pozitivně definitní (PD), jestliže
  $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}\colon \varphi(\boldsymbol{u}) > 0$,
- negativně definitní (ND), jestliže
  $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}\colon \varphi(\boldsymbol{u}) < 0$,

Definice

Nechť $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je kvadratická forma. Řekneme, že φ je

- pozitivně definitní (PD), jestliže
  $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}\colon \varphi(\boldsymbol{u}) > 0$,
- negativně definitní (ND), jestliže
  $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}\colon \varphi(\boldsymbol{u}) < 0$,
- pozitivně semidefinitní (PSD), jestliže
  $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n\colon \varphi(\boldsymbol{u}) \geq 0$,

Definice

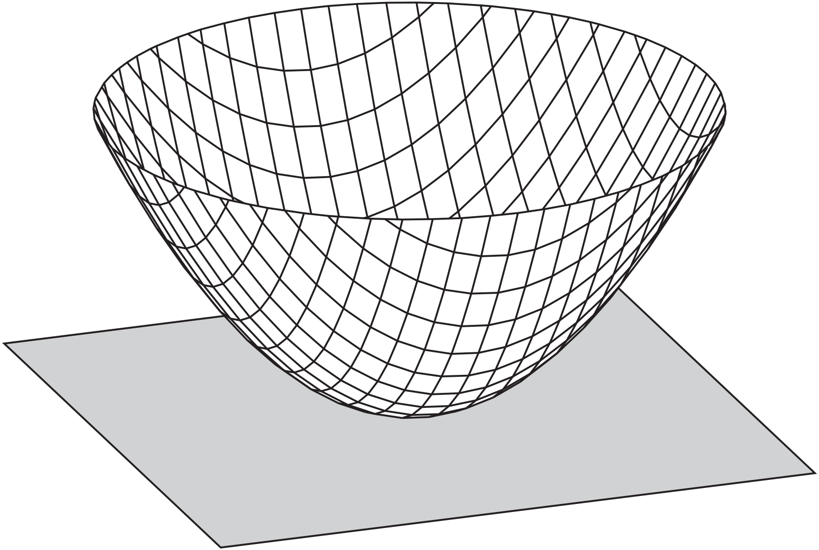
Nechť $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je kvadratická forma. Řekneme, že φ je

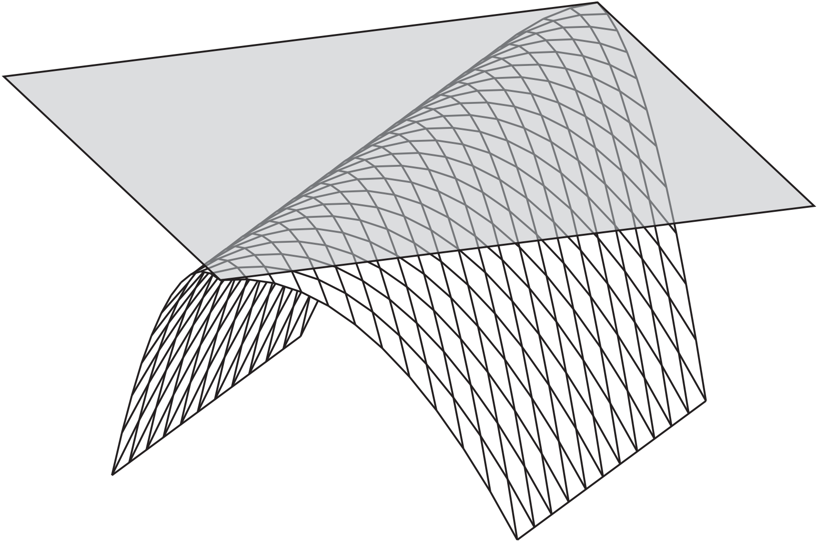
- pozitivně definitní (PD), jestliže
  $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}\colon \varphi(\boldsymbol{u}) > 0$,
- negativně definitní (ND), jestliže
  $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}\colon \varphi(\boldsymbol{u}) < 0$,
- pozitivně semidefinitní (PSD), jestliže
  $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n\colon \varphi(\boldsymbol{u}) \geq 0$,
- negativně semidefinitní (NSD), jestliže
  $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n\colon \varphi(\boldsymbol{u}) \leq 0$,

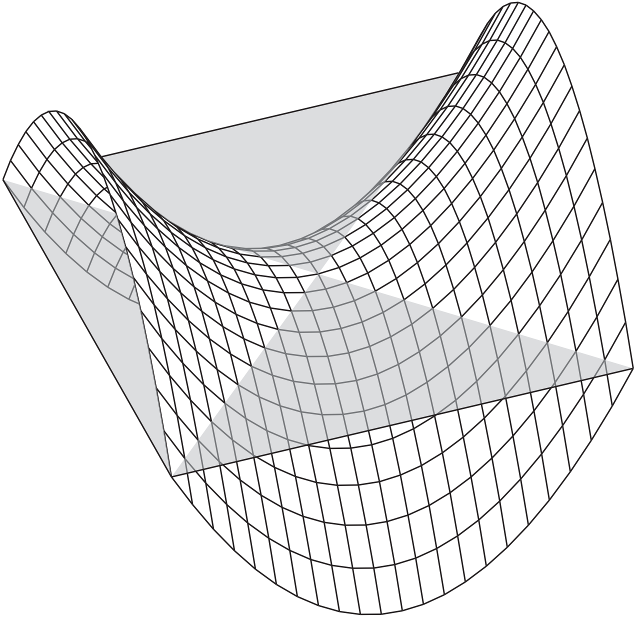
Definice

Nechť $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je kvadratická forma. Řekneme, že φ je

- pozitivně definitní (PD), jestliže
  $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}\colon \varphi(\boldsymbol{u}) > 0$,
- negativně definitní (ND), jestliže
  $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}\colon \varphi(\boldsymbol{u}) < 0$,
- pozitivně semidefinitní (PSD), jestliže
  $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n\colon \varphi(\boldsymbol{u}) \geq 0$,
- negativně semidefinitní (NSD), jestliže
  $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n\colon \varphi(\boldsymbol{u}) \leq 0$,
- indefinitní (ID), neplatí-li nic z předchozího, tj.
  $\exists \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n\colon \varphi(\boldsymbol{u}) > 0 \wedge \varphi(\boldsymbol{v}) < 0$.







Definice

Řekneme, že matice $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M(n \times n)$ je diagonální, jestliže $a_{ij} = 0$ pro každé $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$.

Definice

Řekneme, že matice $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M(n \times n)$ je diagonální, jestliže $a_{ij} = 0$ pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$.

Tvrzení 35

Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M(n \times n)$ je diagonální. Pak platí:

- *$\boldsymbol{A}$ je PD, právě když $a_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, n$;*

Definice

Řekneme, že matice $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M(n \times n)$ je diagonální, jestliže $a_{ij} = 0$ pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$.

Tvrzení 35

Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M(n \times n)$ je diagonální. Pak platí:

- *$\boldsymbol{A}$ je PD, právě když $a_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, n$;*
- *$\boldsymbol{A}$ je ND, právě když $a_{ii} < 0$, $i = 1, \dots, n$;*

Definice

Řekneme, že matice $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M(n \times n)$ je diagonální, jestliže $a_{ij} = 0$ pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$.

Tvrzení 35

Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M(n \times n)$ je diagonální. Pak platí:

- *$\boldsymbol{A}$ je PD, právě když $a_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, n$;*
- *$\boldsymbol{A}$ je ND, právě když $a_{ii} < 0$, $i = 1, \dots, n$;*
- *$\boldsymbol{A}$ je PSD, právě když $a_{ii} \geq 0$, $i = 1, \dots, n$;*

Definice

Řekneme, že matice $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M(n \times n)$ je diagonální, jestliže $a_{ij} = 0$ pro každé $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$.

Tvrzení 35

Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M(n \times n)$ je diagonální. Pak platí:

- *$\boldsymbol{A}$ je PD, právě když $a_{ii} > 0$, $i = 1, \ldots, n$;*
- *$\boldsymbol{A}$ je ND, právě když $a_{ii} < 0$, $i = 1, \ldots, n$;*
- *$\boldsymbol{A}$ je PSD, právě když $a_{ii} \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$;*
- *$\boldsymbol{A}$ je NSD, právě když $a_{ii} \leq 0$, $i = 1, \ldots, n$;*

Definice

Řekneme, že matice $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M(n \times n)$ je diagonální, jestliže $a_{ij} = 0$ pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$.

Tvrzení 35

Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M(n \times n)$ je diagonální. Pak platí:

- *$\boldsymbol{A}$ je PD, právě když $a_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, n$;*
- *$\boldsymbol{A}$ je ND, právě když $a_{ii} < 0$, $i = 1, \dots, n$;*
- *$\boldsymbol{A}$ je PSD, právě když $a_{ii} \geq 0$, $i = 1, \dots, n$;*
- *$\boldsymbol{A}$ je NSD, právě když $a_{ii} \leq 0$, $i = 1, \dots, n$;*
- *$\boldsymbol{A}$ je ID, právě když existují taková $i, j \in \{1, \dots, n\}$, že $a_{ii} > 0$ a $a_{jj} < 0$.*

Definice

Symetrickou elementární úpravou matice $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ budeme rozumět úpravu, kdy provedeme jistou elementární řádkovou úpravu matice $\boldsymbol{A}$ a vzniklou matici upravíme odpovídající sloupcovou úpravou.

Definice

Symetrickou elementární úpravou matice $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ budeme rozumět úpravu, kdy provedeme jistou elementární řádkovou úpravu matice $\boldsymbol{A}$ a vzniklou matici upravíme odpovídající sloupcovou úpravou.
Symetrickou transformací matice $\boldsymbol{A}$ budeme rozumět konečnou posloupnost symetrických elementárních úprav.

Lemma 36

Nechť T je transformace matic o m řádcích. Potom existuje regulární matice $\boldsymbol{B} \in M(m \times m)$ taková, že kdykoli $\boldsymbol{A}' \in M(m \times n)$ vznikne z $\boldsymbol{A} \in M(m \times n)$ pomocí T, tak platí $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$.

Lemma 36

Nechť T je transformace matic o m řádcích. Potom existuje regulární matice $\boldsymbol{B} \in M(m \times m)$ taková, že kdykoli $\boldsymbol{A}' \in M(m \times n)$ vznikne z $\boldsymbol{A} \in M(m \times n)$ pomocí T, tak platí $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{BA}$.
Obráceně, je-li $\boldsymbol{B} \in M(m \times m)$ regulární matice, pak existuje transformace T matic o m řádcích taková, že pro každou matici $\boldsymbol{A} \in M(m \times n)$ platí $\boldsymbol{A} \overset{T}{\rightsquigarrow} \boldsymbol{BA}$.

Lemma 36

Nechť T je transformace matic o m řádcích. Potom existuje regulární matice $\boldsymbol{B} \in M(m \times m)$ taková, že kdykoli $\boldsymbol{A}' \in M(m \times n)$ vznikne z $\boldsymbol{A} \in M(m \times n)$ pomocí T, tak platí $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{BA}$.
Obráceně, je-li $\boldsymbol{B} \in M(m \times m)$ regulární matice, pak existuje transformace T matic o m řádcích taková, že pro každou matici $\boldsymbol{A} \in M(m \times n)$ platí $\boldsymbol{A} \overset{T}{\rightsquigarrow} \boldsymbol{BA}$.

Věta 37

Uvažujme symetrickou transformaci T matic typu $n \times n$. Potom existuje regulární matice $\boldsymbol{B} \in M(n \times n)$ taková, že kdykoli matice $\boldsymbol{A}' \in M(n \times n)$ vznikne z $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ pomocí T, tak platí $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{BAB}^T$.

Lemma 38

(i) *Je-li* $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ *symetrická matice a* $\boldsymbol{C} \in M(n \times n)$*, pak* $\boldsymbol{CAC}^T$ *je opět symetrická matice.*

(ii) *Symetrická transformace zachovává symetrii matice.*

Lemma 39

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ *je symetrická matice a* $\boldsymbol{Q} \in M(n \times n)$ *je regulární matice. Je-li* $\boldsymbol{A}$ *pozitivně definitní (resp. negativně definitní, pozitivně semidefinitní, negativně semidefinitní, indefinitní), pak je matice* $\boldsymbol{QAQ}^T$ *pozitivně definitní (resp. negativně definitní, . . .).*

Lemma 39

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ *je symetrická matice a* $\boldsymbol{Q} \in M(n \times n)$ *je regulární matice. Je-li* $\boldsymbol{A}$ *pozitivně definitní (resp. negativně definitní, pozitivně semidefinitní, negativně semidefinitní, indefinitní), pak je matice* $\boldsymbol{QAQ}^T$ *pozitivně definitní (resp. negativně definitní, ...).*

Věta 40

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ *je symetrická matice a nechť* $\boldsymbol{B} \in M(n \times n)$ *vznikne z* $\boldsymbol{A}$ *pomocí symetrické transformace. Matice* $\boldsymbol{A}$ *je pozitivně definitní (resp. negativně definitní, pozitivně semidefinitní, negativně semidefinitní, indefinitní), právě když* $\boldsymbol{B}$ *je pozitivně definitní (resp. negativně definitní, ...).*

Věta 41

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ je symetrická matice. Pak ji lze symetrickou transformací převést na diagonální matici.

Věta 41

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ *je symetrická matice. Pak ji lze symetrickou transformací převést na diagonální matici.*

Poznámka

Má-li symetrická matice $\boldsymbol{C} = (c_{ij}) \in M(n \times n)$ na diagonále kladný prvek c_{ii} a záporný prvek c_{jj}, pak je již indefinitní.

Věta 42 (Sylvestrovo kritérium)

Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M(n \times n)$ *je symetrická matice. Pak* $\boldsymbol{A}$ *je*

- *pozitivně definitní, právě když*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{pro každé } k = 1, \dots, n,$$

Věta 42 (Sylvestrovo kritérium)

Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M(n \times n)$ *je symetrická matice. Pak* $\boldsymbol{A}$ *je*

- *pozitivně definitní, právě když*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{pro každé } k = 1, \dots, n,$$

- *negativně definitní, právě když*

$$(-1)^k \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{pro každé } k = 1, \dots, n,$$

- pozitivně semidefinitní, právě když pro každou k-tici přirozených čísel $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$, $k = 1, \ldots, n$, platí
$$\begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \ldots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k i_1} & \ldots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix} \ge 0,$$

- pozitivně semidefinitní, právě když pro každou k-tici přirozených čísel $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, $k = 1, \ldots, n$, platí
$$\begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \ldots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k i_1} & \ldots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix} \geq 0,$$
- negativně semidefinitní, právě když pro každou k-tici přirozených čísel $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, $k = 1, \ldots, n$, platí
$$(-1)^k \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \ldots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k i_1} & \ldots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix} \geq 0.$$

IX.4. Vlastní čísla a vektory

IX.4. Vlastní čísla a vektory

Definice

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$. Řekneme, že $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$, jestliže existuje nenulový vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ takový, že $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$. Vektor $\boldsymbol{x}$ pak nazýváme vlastním vektorem matice $\boldsymbol{A}$ příslušným k vlastnímu číslu λ.

IX.4. Vlastní čísla a vektory

Definice

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$. Řekneme, že $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$, jestliže existuje nenulový vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ takový, že $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$. Vektor $\boldsymbol{x}$ pak nazýváme vlastním vektorem matice $\boldsymbol{A}$ příslušným k vlastnímu číslu λ.

Věta 43

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$.

(i) *Prvek $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem matice $\boldsymbol{A}$, právě když $\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$.*

IX.4. Vlastní čísla a vektory

Definice

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$. Řekneme, že $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$, jestliže existuje nenulový vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ takový, že $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$. Vektor $\boldsymbol{x}$ pak nazýváme vlastním vektorem matice $\boldsymbol{A}$ příslušným k vlastnímu číslu λ.

Věta 43

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$.

(i) *Prvek $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem matice $\boldsymbol{A}$, právě když $\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$.*

(ii) *Funkce $\lambda \mapsto \det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ je polynom n-tého stupně s koeficientem u n-té mocniny rovným jedné.*

IX.4. Vlastní čísla a vektory

Definice

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$. Řekneme, že $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$, jestliže existuje nenulový vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ takový, že $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$. Vektor $\boldsymbol{x}$ pak nazýváme vlastním vektorem matice $\boldsymbol{A}$ příslušným k vlastnímu číslu λ.

Věta 43

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$.

(i) *Prvek* $\lambda \in \mathbb{C}$ *je vlastním číslem matice* $\boldsymbol{A}$, *právě když* $\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$.

(ii) *Funkce* $\lambda \mapsto \det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ *je polynom n-tého stupně s koeficientem u n-té mocniny rovným jedné.*

(iii) *Matice* $\boldsymbol{A}$ *má nejvýše n různých vlastních čísel.*

Definice

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$. Polynom $\lambda \mapsto \det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ se nazývá charakteristický polynom matice $\boldsymbol{A}$. Vzhledem k tvrzení (i) předchozí věty definujeme násobnost vlastního čísla matice jako násobnost tohoto čísla jakožto kořene charakteristického polynomu.

Definice

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$. Polynom $\lambda \mapsto \det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ se nazývá charakteristický polynom matice $\boldsymbol{A}$. Vzhledem k tvrzení (i) předchozí věty definujeme násobnost vlastního čísla matice jako násobnost tohoto čísla jakožto kořene charakteristického polynomu.

Věta 44

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ je symetrická matice. Pak jsou všechna její vlastní čísla reálná.

Definice

Řekneme, že matice $\boldsymbol{Q} \in M(n \times n)$ je ortogonální, jestliže platí $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{I}$.

Definice

Řekneme, že matice $\boldsymbol{Q} \in M(n \times n)$ je ortogonální, jestliže platí $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{I}$.

Věta 45 (spektrální rozklad matice)

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ je symetrická matice. Pak existuje ortogonální matice $\boldsymbol{Q} \in M(n \times n)$ taková, že

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$.

Věta 46

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ *je symetrická matice. Pak platí:*

- $\boldsymbol{A}$ *je pozitivně definitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla kladná,*

Věta 46

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ je symetrická matice. Pak platí:

- *$\boldsymbol{A}$ je pozitivně definitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla kladná,*
- *$\boldsymbol{A}$ je negativně definitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla záporná,*

Věta 46

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ *je symetrická matice. Pak platí:*

- $\boldsymbol{A}$ *je pozitivně definitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla kladná,*
- $\boldsymbol{A}$ *je negativně definitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla záporná,*
- $\boldsymbol{A}$ *je pozitivně semidefinitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla nezáporná,*

Věta 46

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ je symetrická matice. Pak platí:

- *$\boldsymbol{A}$ je pozitivně definitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla kladná,*
- *$\boldsymbol{A}$ je negativně definitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla záporná,*
- *$\boldsymbol{A}$ je pozitivně semidefinitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla nezáporná,*
- *$\boldsymbol{A}$ je negativně semidefinitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla nekladná,*

Věta 46

Nechť $\mathbf{A} \in M(n \times n)$ je symetrická matice. Pak platí:

- *$\mathbf{A}$ je pozitivně definitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla kladná,*
- *$\mathbf{A}$ je negativně definitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla záporná,*
- *$\mathbf{A}$ je pozitivně semidefinitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla nezáporná,*
- *$\mathbf{A}$ je negativně semidefinitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla nekladná,*
- *$\mathbf{A}$ je indefinitní, právě když má kladné vlastní číslo i záporné vlastní číslo.*

Definice

Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M(n \times n)$. Stopou matice $\boldsymbol{A}$ rozumíme číslo

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Definice

Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M(n \times n)$. Stopou matice $\boldsymbol{A}$ rozumíme číslo

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Věta 47

Nechť $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M(n \times n)$, $a \in \mathbb{R}$. Pak platí:

(i) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$,

Definice

Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M(n \times n)$. Stopou matice $\boldsymbol{A}$ rozumíme číslo

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Věta 47

Nechť $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M(n \times n)$, $a \in \mathbb{R}$. Pak platí:

(i) $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{tr}(\boldsymbol{B})$,

(ii) $\operatorname{tr}(a\boldsymbol{A}) = a \operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$,

Definice

Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M(n \times n)$. Stopou matice $\boldsymbol{A}$ rozumíme číslo

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Věta 47

Nechť $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M(n \times n)$, $a \in \mathbb{R}$. Pak platí:

(i) $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{tr}(\boldsymbol{B})$,

(ii) $\operatorname{tr}(a\boldsymbol{A}) = a \operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$,

(iii) $\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{BA})$,

Definice

Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M(n \times n)$. Stopou matice $\boldsymbol{A}$ rozumíme číslo

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Věta 47

Nechť $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M(n \times n)$, $a \in \mathbb{R}$. Pak platí:

(i) $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{tr}(\boldsymbol{B})$,

(ii) $\operatorname{tr}(a\boldsymbol{A}) = a \operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$,

(iii) $\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{BA})$,

(iv) $\operatorname{tr}(\boldsymbol{ABC}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{CAB}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{BCA})$.

Důležitým příkladem lineárních zobrazení jsou projekce, což jsou lineární zobrazení $P\colon V \to V$ vektorového prostoru V do sebe, pro která platí $P \circ P = P$.

Důležitým příkladem lineárních zobrazení jsou projekce, což jsou lineární zobrazení $P\colon V \to V$ vektorového prostoru V do sebe, pro která platí $P \circ P = P$. Projekce je zobrazení na podprostor $\mathrm{Im}(P)$ a pro každý vektor $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}(P)$ platí $P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.

Důležitým příkladem lineárních zobrazení jsou projekce, což jsou lineární zobrazení $P\colon V \to V$ vektorového prostoru V do sebe, pro která platí $P \circ P = P$. Projekce je zobrazení na podprostor $\mathrm{Im}(P)$ a pro každý vektor $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}(P)$ platí $P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.
Reprezentující matice projekcí na $\mathbb{R}^n$ splňují vztah $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$. Takovým maticím říkáme idempotentní.

Tvrzení 48

Symetrická idempotentní matice je pozitivně semidefinitní.

Tvrzení 48

Symetrická idempotentní matice je pozitivně semidefinitní.

Tvrzení 49

Vlastní čísla idempotentní matice jsou rovna 0 *nebo* 1.

Věta 50

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ *je idempotentní. Pak existuje regulární matice* $\boldsymbol{Q} \in M(n \times n)$ *taková, že* $\boldsymbol{QAQ}^{-1} = \boldsymbol{D}$*, kde matice* $\boldsymbol{D}$ *je diagonální a na diagonále má jen prvky* 0 *a* 1*.*

Věta 50

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ *je idempotentní. Pak existuje regulární matice* $\boldsymbol{Q} \in M(n \times n)$ *taková, že* $\boldsymbol{QAQ}^{-1} = \boldsymbol{D}$*, kde matice* $\boldsymbol{D}$ *je diagonální a na diagonále má jen prvky* 0 *a* 1*.*

Věta 51

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ *je idempotentní. Pak* $h(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$*.*

Věta 50

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ *je idempotentní. Pak existuje regulární matice* $\boldsymbol{Q} \in M(n \times n)$ *taková, že* $\boldsymbol{QAQ}^{-1} = \boldsymbol{D}$*, kde matice* $\boldsymbol{D}$ *je diagonální a na diagonále má jen prvky* 0 *a* 1*.*

Věta 51

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ *je idempotentní. Pak* $h(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$*.*

Důsledek 52

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ *je idempotentní. Pak* $h(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = n - h(\boldsymbol{A})$*.*

IX.5. Skalární součin

IX.5. Skalární součin

Definice

Skalárním součinem vektorů $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ rozumíme číslo

$$<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}> = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

IX.5. Skalární součin

Definice

Skalárním součinem vektorů $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ rozumíme číslo

$$<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}> = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Definice

Řekneme, že vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ jsou na sebe kolmé, jestliže $<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}> = 0$.

Věta 53 (vlastnosti skalárního součinu)

Platí:

(i) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n\colon <\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}> = <\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}> + <\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}>$,

(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n\colon <\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}> = \alpha<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}>$,

(iii) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n\colon <\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}> = <\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}>$,

(iv) *zobrazení* $\boldsymbol{x} \mapsto <\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}>$ *z* $\mathbb{R}^n$ *do* $\mathbb{R}$ *je pozitivně definitní kvadratická forma.*

Definice

Normou vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ rozumíme číslo

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Definice

Normou vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ rozumíme číslo

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Věta 54 (vlastnosti normy)

Nechť $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak platí

(i) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$,

Definice

Normou vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ rozumíme číslo

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Věta 54 (vlastnosti normy)

Nechť $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak platí

(i) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$,

(ii) $\|\boldsymbol{x}\| = 0$, *právě když* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$,

Definice

Normou vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ rozumíme číslo

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Věta 54 (vlastnosti normy)

Nechť $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak platí

(i) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$,

(ii) $\|\boldsymbol{x}\| = 0$, *právě když* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$,

(iii) $\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$,

Definice

Normou vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ rozumíme číslo

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Věta 54 (vlastnosti normy)

Nechť $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$*,* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Pak platí*

(i) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$,

(ii) $\|\boldsymbol{x}\| = 0$, *právě když* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$,

(iii) $\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$,

(iv) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ *(trojúhelníková nerovnost),*

Definice

Normou vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ rozumíme číslo

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Věta 54 (vlastnosti normy)

Nechť $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak platí

(i) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$,

(ii) $\|\boldsymbol{x}\| = 0$, *právě když* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$,

(iii) $\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$,

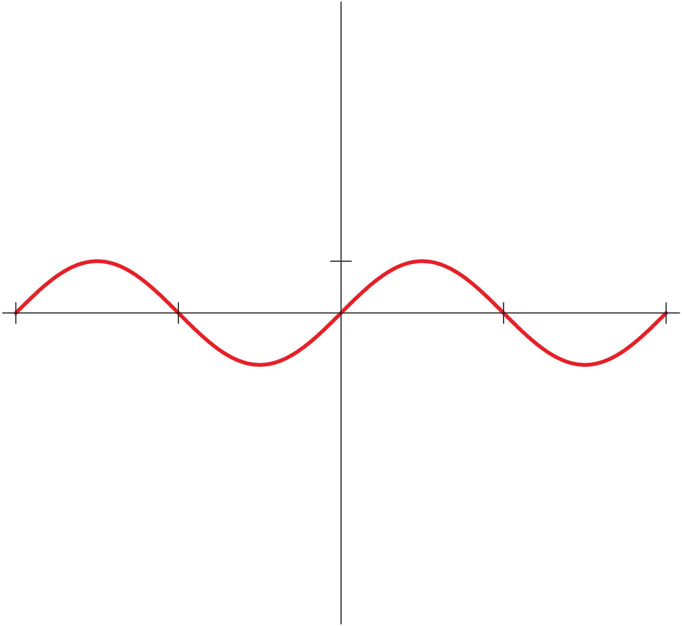
(iv) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ *(trojúhelníková nerovnost)*,

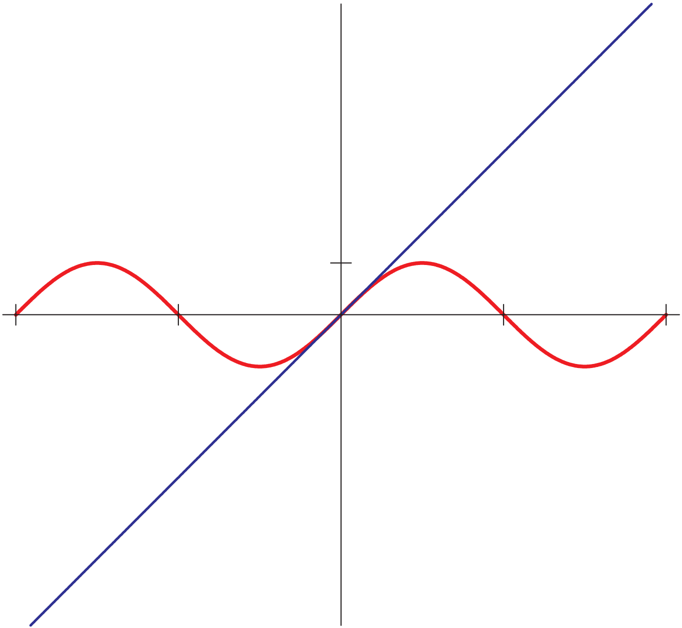
(v) $|<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}>| \leq \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|$ *(Cauchyova nerovnost)*.

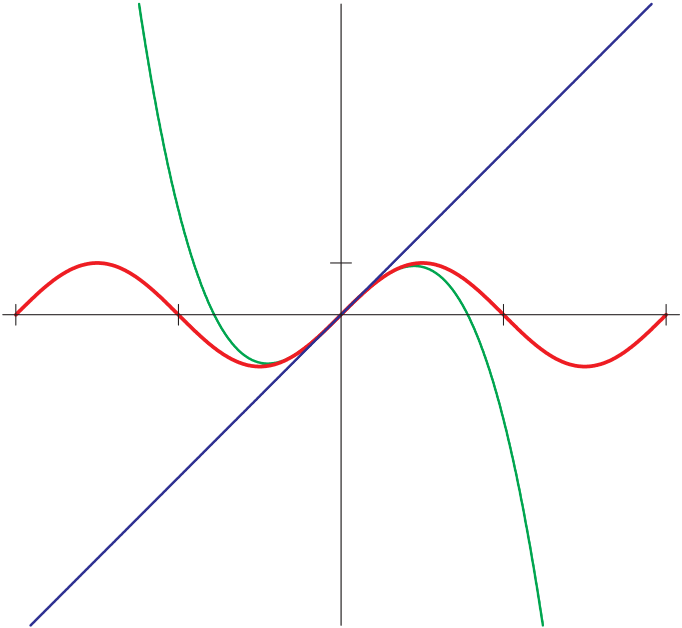
Věta 55 (Pythagorova věta)

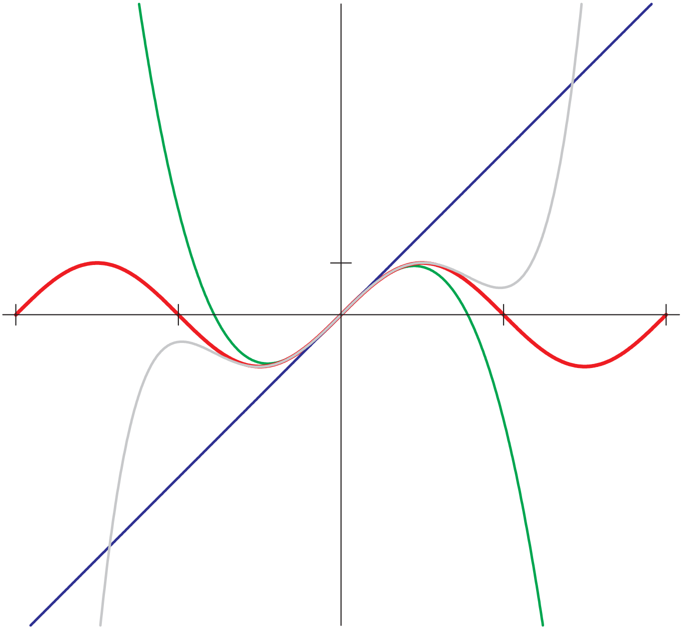
Vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ *jsou na sebe kolmé, právě když* $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2$.

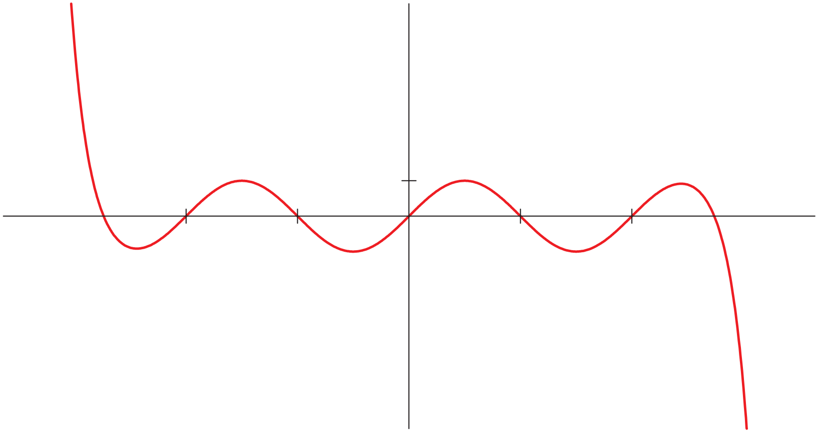
X.1. Taylorův polynom funkce jedné reálné proměnné











Definice

Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a funkce f má v bodě a vlastní n-tou derivaci. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \\ + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme Taylorovým polynomem funkce f v bodě a řádu n.

Definice

Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a funkce f má v bodě a vlastní n-tou derivaci. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \\ + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme Taylorovým polynomem funkce f v bodě a řádu n.

Poznámka

Označíme-li $T = T_n^{f,a}$, pak platí $T^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ pro $k = 0, 1, \ldots, n$.

Lemma 56

Nechť $n \in \mathbb{N}$, Q je polynom, st $Q \leq n$ *a* $\lim_{x \to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$*.*
Pak Q je nulový polynom.

Věta 57 (Peanův tvar zbytku)

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a funkce f má v bodě a vlastní n-tou derivaci. Potom

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Věta 57 (Peanův tvar zbytku)

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a funkce f má v bodě a vlastní n-tou derivaci. Potom

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Věta 58 (o jednoznačnosti)

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, funkce f má v bodě a vlastní n-tou derivaci a P je polynom stupně nejvýše n splňující

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Potom $P = T_n^{f,a}$.

Definice

Nechť f a g jsou funkce, $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f je v bodě a malé o od g (píšeme $f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$), jestliže platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Věta 59 (aritmetika malého o)

Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.

(i) *Jestliže $f_1(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ a $f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$, potom $f_1(x) + f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$.*

Věta 59 (aritmetika malého o)

Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.

(i) *Jestliže* $f_1(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ *a* $f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$, *potom* $f_1(x) + f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$.

(ii) *Jestliže* $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ *a* $f_2(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$, *potom* $f_1(x)f_2(x) = o\big(g_1(x)g_2(x)\big)$, $x \to a$.

Věta 59 (aritmetika malého o)

Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.

(i) *Jestliže* $f_1(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ *a* $f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$, *potom* $f_1(x) + f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$.

(ii) *Jestliže* $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ *a* $f_2(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$, *potom* $f_1(x)f_2(x) = o\big(g_1(x)g_2(x)\big)$, $x \to a$.

(iii) *Jestliže* $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ *a* f_2 *je nenulová na jistém prstencovém okolí bodu* a, *potom* $f_1(x)f_2(x) = o\big(g_1(x)f_2(x)\big)$, $x \to a$.

Věta 59 (aritmetika malého o)

Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.

(i) *Jestliže $f_1(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ a $f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$, potom $f_1(x) + f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$.*

(ii) *Jestliže $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a $f_2(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$, potom $f_1(x)f_2(x) = o\big(g_1(x)g_2(x)\big)$, $x \to a$.*

(iii) *Jestliže $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a f_2 je nenulová na jistém prstencovém okolí bodu a, potom $f_1(x)f_2(x) = o\big(g_1(x)f_2(x)\big)$, $x \to a$.*

(iv) *Jestliže $f(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a existuje vlastní $\lim_{x\to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$, potom $f(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$.*

Věta 59 (aritmetika malého o)

Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.

(i) *Jestliže $f_1(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ a $f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$, potom $f_1(x) + f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$.*

(ii) *Jestliže $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a $f_2(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$, potom $f_1(x)f_2(x) = o\big(g_1(x)g_2(x)\big)$, $x \to a$.*

(iii) *Jestliže $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a f_2 je nenulová na jistém prstencovém okolí bodu a, potom $f_1(x)f_2(x) = o\big(g_1(x)f_2(x)\big)$, $x \to a$.*

(iv) *Jestliže $f(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a existuje vlastní $\lim_{x\to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$, potom $f(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$.*

(v) *Jestliže $f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ a h je omezená na jistém prstencovém okolí bodu a, potom $h(x)f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$.*

Věta 59 (aritmetika malého o)

Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.

(i) *Jestliže $f_1(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ a $f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$, potom $f_1(x) + f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$.*

(ii) *Jestliže $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a $f_2(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$, potom $f_1(x)f_2(x) = o\big(g_1(x)g_2(x)\big)$, $x \to a$.*

(iii) *Jestliže $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a f_2 je nenulová na jistém prstencovém okolí bodu a, potom $f_1(x)f_2(x) = o\big(g_1(x)f_2(x)\big)$, $x \to a$.*

(iv) *Jestliže $f(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a existuje vlastní $\lim_{x\to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$, potom $f(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$.*

(v) *Jestliže $f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ a h je omezená na jistém prstencovém okolí bodu a, potom $h(x)f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$.*

(vi) *Jestliže $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \le n$, a $f(x) = o\big((x-a)^n\big)$, $x \to a$, potom $f(x) = o\big((x-a)^m\big)$, $x \to a$.*

Věta 60

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $f(y) = o\big(g(y)\big)$, $y \to b$, $\lim_{x\to a} \varphi(x) = b$ *a existuje* $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, *takové, že*

$$\forall x \in P(a, \delta)\colon\ \varphi(x) \neq b.$$

Potom $f\big(\varphi(x)\big) = o\big(g(\varphi(x))\big)$, $x \to a$.

Věta 61 (Lagrangeův tvar zbytku)

Nechť $n \in \mathbb{N}$, a dále nechť I je otevřený interval, $f \in C^{n+1}(I)$ a $a \in I$. Potom pro každé $x \in I$ existuje číslo $\xi \in \langle a, x \rangle$ splňující

$$f(x) = T_n^{f,a}(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

Definice

Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a funkce f má v bodě a derivace všech řádů. Potom řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme Taylorovou řadou funkce f o středu a. Ve speciálním případě $a = 0$ mluvíme o MacLaurinově řadě.

X.2. Taylorovy polynomy a řady elementárních funkcí

Tvrzení 62

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí:

- $T_k^{\exp,0} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k$,

X.2. Taylorovy polynomy a řady elementárních funkcí

Tvrzení 62

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí:

- $T_k^{\exp,0} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k$,
- $T_{2k-1}^{\sin,0} = T_{2k}^{\sin,0} =$
  $x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1}$,

X.2. Taylorovy polynomy a řady elementárních funkcí

Tvrzení 62

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí:

- $T_k^{\exp,0} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k$,
- $T_{2k-1}^{\sin,0} = T_{2k}^{\sin,0} =$
  $x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1}$,
- $T_{2k}^{\cos,0} = T_{2k+1}^{\cos,0} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k}$,

X.2. Taylorovy polynomy a řady elementárních funkcí

Tvrzení 62

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí:

- $T_k^{\exp,0} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k,$
- $T_{2k-1}^{\sin,0} = T_{2k}^{\sin,0} =$
  $x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1},$
- $T_{2k}^{\cos,0} = T_{2k+1}^{\cos,0} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k},$
- $T_k^{\log(1+x),0} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k,$

X.2. Taylorovy polynomy a řady elementárních funkcí

Tvrzení 62

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí:

- $T_k^{\exp,0} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k,$
- $T_{2k-1}^{\sin,0} = T_{2k}^{\sin,0} =$
  $x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1},$
- $T_{2k}^{\cos,0} = T_{2k+1}^{\cos,0} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k},$
- $T_k^{\log(1+x),0} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k,$
- $T_k^{(1+x)^\alpha,0} = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^k$, *kde* $\alpha \in \mathbb{R}$,
  $\binom{\alpha}{0} = 1$, $\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}$.

Věta 63

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ *jsou funkce* exp, sin *a* cos *součtem své Taylorovy řady o středu* 0. *Platí tedy:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

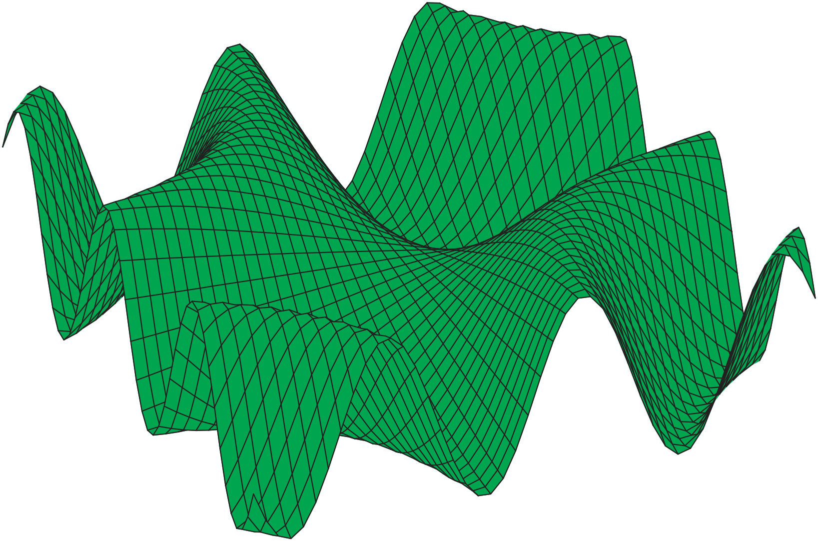
Věta 64

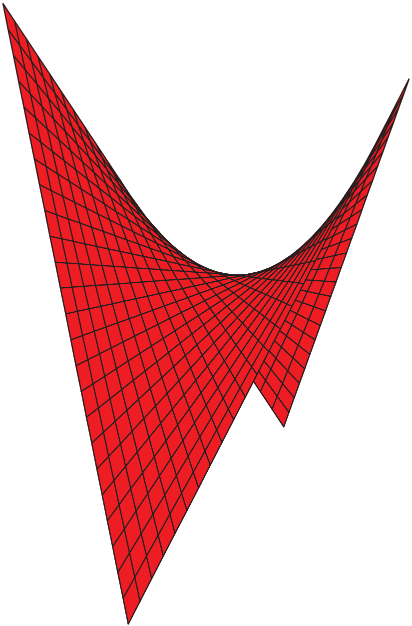
Platí

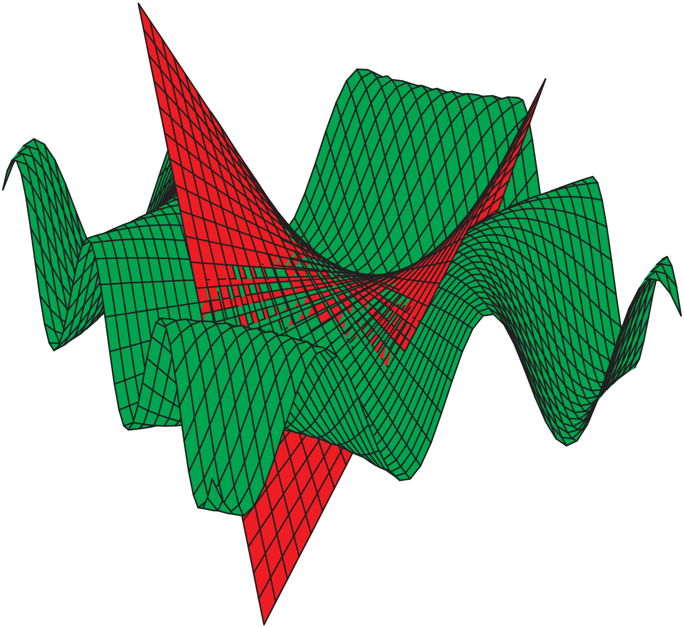
$$\forall x \in (-1, 1\rangle \colon \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n,$$

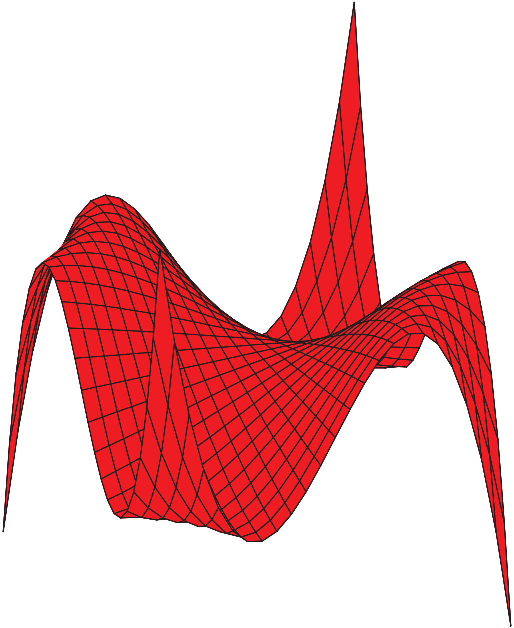
$$\forall x \in (-1, 1) \colon (1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

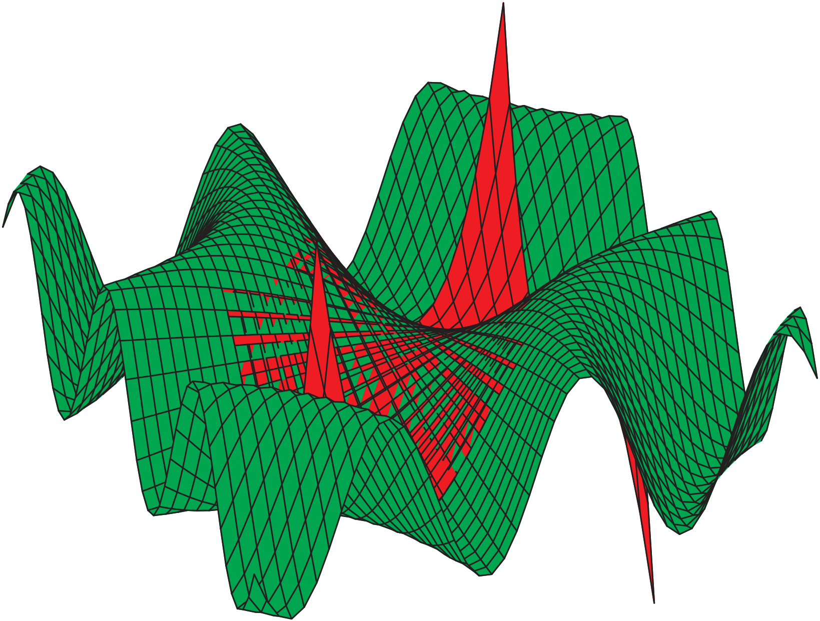
X.3. Taylorův polynom 2. řádu funkce více proměnných











Definice

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\boldsymbol{a} \in G$ a $f \in C^2(G)$. Definujme funkci $T_2^{f,\boldsymbol{a}} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ předpisem

$$T_2^{f,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})(x_i - a_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j).$$

Tuto funkci nazýváme Taylorovým polynomem druhého řádu funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$.

Označme symbolem $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ matici druhých parciálních derivací funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ (tzv. Hessovu matici), tj.

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a}) \right)_{i,j=1..n}.$$

Pak můžeme psát

$$T_2^{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^T \nabla^2 f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}).$$

Věta 65

Nechť $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $\Delta > 0$ *a* $f \in C^2\big(B(\boldsymbol{a}, \Delta)\big)$. *Potom existuje funkce* $\omega\colon B(\boldsymbol{a}, \Delta) \to \mathbb{R}$ *taková, že*

$$\forall \boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, \Delta)\colon\ f(\boldsymbol{x}) = T_2^{f,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) + \omega(\boldsymbol{x}) \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|^2$$

a platí

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \omega(\boldsymbol{x}) = 0.$$

XI.1. Podmínky druhého řádu

XI.1. Podmínky druhého řádu

Definice

Nechť f je funkce n proměnných. Je-li bod $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ stacionárním bodem funkce f a f nenabývá v $\boldsymbol{a}$ extrému, tj.

$$\forall \delta > 0\ \exists \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{a}, \delta)\colon f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{a}) \text{ a } f(\boldsymbol{y}) < f(\boldsymbol{a}),$$

pak bod $\boldsymbol{a}$ nazýváme sedlovým bodem funkce f.

Věta 66 (nutné podmínky druhého řádu)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná otevřená množina, $f \in C^2(G)$ a $\boldsymbol{a} \in G$. Potom platí:

(i) *Je-li $\boldsymbol{a}$ bodem lokálního maxima funkce f, je matice $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ negativně semidefinitní.*

Věta 66 (nutné podmínky druhého řádu)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná otevřená množina, $f \in C^2(G)$ a $\boldsymbol{a} \in G$. Potom platí:

(i) *Je-li $\boldsymbol{a}$ bodem lokálního maxima funkce f, je matice $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ negativně semidefinitní.*

(ii) *Je-li $\boldsymbol{a}$ bodem lokálního minima funkce f, je matice $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ pozitivně semidefinitní.*

Věta 67 (postačující podmínky druhého řádu)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná otevřená množina, $f \in C^2(G)$ a nechť $\boldsymbol{a} \in G$ je stacionárním bodem funkce f. Potom platí:

(i) *Je-li $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ negativně definitní, nabývá f v bodě $\boldsymbol{a}$ ostrého lokálního maxima.*

Věta 67 (postačující podmínky druhého řádu)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná otevřená množina, $f \in C^2(G)$ a nechť $\boldsymbol{a} \in G$ je stacionárním bodem funkce f. Potom platí:

(i) *Je-li $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ negativně definitní, nabývá f v bodě $\boldsymbol{a}$ ostrého lokálního maxima.*

(ii) *Je-li $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ pozitivně definitní, nabývá f v bodě $\boldsymbol{a}$ ostrého lokálního minima.*

Věta 67 (postačující podmínky druhého řádu)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná otevřená množina, $f \in C^2(G)$ a nechť $\boldsymbol{a} \in G$ je stacionárním bodem funkce f. Potom platí:

(i) *Je-li $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ negativně definitní, nabývá f v bodě $\boldsymbol{a}$ ostrého lokálního maxima.*

(ii) *Je-li $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ pozitivně definitní, nabývá f v bodě $\boldsymbol{a}$ ostrého lokálního minima.*

(iii) *Je-li $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ indefinitní, nenabývá f v bodě $\boldsymbol{a}$ ani lokálního maxima, ani lokálního minima, tj. $\boldsymbol{a}$ je sedlový bod funkce f.*

Lemma 68

Kvadratická forma $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je pozitivně definitní (resp. negativně definitní), právě když existuje $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, takové, že pro všechna $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\varphi(\boldsymbol{u}) \geq \alpha \left\|\boldsymbol{u}\right\|^2 \qquad \textit{(resp. } \varphi(\boldsymbol{u}) \leq -\alpha \left\|\boldsymbol{u}\right\|^2\textit{).}$$

XI.2. Extrémy konkávních funkcí

XI.2. Extrémy konkávních funkcí

Věta 69

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná otevřená konvexní množina a $f \in C^2(G)$. Funkce f je na množině G konkávní, právě když pro každé $\boldsymbol{x} \in G$ je matice $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ negativně semidefinitní.

Věta 70

Nechť G je otevřená konvexní podmnožina $\mathbb{R}^n$, $f \in C^2(G)$ a $\boldsymbol{a} \in G$. Nechť platí

(i) $\forall \boldsymbol{x} \in G\colon \nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ *je negativně semidefinitní,*

(ii) $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$.

Potom funkce f nabývá v bodě $\boldsymbol{a}$ svého maxima na množině G.