Komplexni cisla

Necht c je komplexni cislo, znacime: $c \in \mathbb{C}$. Pak existuji realna cisla a, b, ze $c = a + ib$, kde $i^2 = -1$. Dale zavadime:

- Realnou cast c: $\mathrm{Re}(c) = a$ a imaginarni cast c: $\mathrm{Im}(c) = b$.
- Absolutni hodnota c: $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Hlavni hodnota argumentu c: Necht $c \neq 0$, pak

$$\mathrm{Arg}(c) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{a}{|c|}\right) & \text{for } b \geq 0, \\ -\arccos\left(\frac{a}{|c|}\right) & \text{for } b < 0. \end{cases}$$

- Goniometricky a exponencialni tvar komplexniho cisla: Necht $c \neq 0$, pak

$$c = |c|(\cos(\mathrm{Arg}(c)) + i\sin(\mathrm{Arg}(c))) = |c|e^{i\,\mathrm{Arg}(c)}.$$

  Z 2π-periodicnosti funkci sin, cos plyne:

$$c = |c|(\cos(\mathrm{Arg}(c)) + i\sin(\mathrm{Arg}(c))) = |c|e^{i\,\mathrm{Arg}(c)} = |c|e^{i(\mathrm{Arg}(c)+2k\pi)}, \qquad (0.1)$$

  kde $k \in \mathbb{Z}$.

- Umocnovani komplexnich cisel. Necht $n \in \mathbb{N}$ a $c \neq 0$:

$$c^n = \left(|c|e^{i\,\mathrm{Arg}(c)}\right)^n = |c|^n e^{in\,\mathrm{Arg}(c)}.$$

- Odmocnovani komplexnich cisel. Necht $n \in \mathbb{N}$ a $c \neq 0$, pak n-tou odmocninou cisla c jsou vsechny takova komplexni cisla d, ze $d^n = c$. Tedy napriklad:

$$d = |c|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{1}{n}\mathrm{Arg}(c)}.$$

  Nicmene z (0.1) plyne, ze jsou to tez vsechna cisla tvaru:

$$|c|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{1}{n}(\mathrm{Arg}(c)+2k\pi)},$$

  kde $k \in \mathbb{Z}$. Taktez z (0.1) plyne, ze

$$|c|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{1}{n}(\mathrm{Arg}(c)+2k\pi)} = |c|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{1}{n}(\mathrm{Arg}(c)+2(k+n)\pi)},$$

  pro libovolne $k \in \mathbb{Z}$. Tedy mnozina n-tych odmocnin cisla c vypada nasledovne:

$$c^{\frac{1}{n}} = \left\{|c|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{1}{n}(\mathrm{Arg}(c)+2k\pi)};\ k = 0, \ldots, n-1\right\}.$$

  Existuje tedy presne n ruznych n-tych odmocnin libovolneho nenuloveho komplexniho cisla c.

Odkazy na jine zdroje souvisejici s komplexnimi cisly: *Anglicka wiki*, *ceska stranka*. Jsou zde tez obrazky, ktere vysvetluji, ze $\mathrm{Arg}(c)$ je ve skutecnosti uhel svirany osou x a spojnici pocatku a cisla c v komplexni rovine.