

XII. Diferenční rovnice

XII. Diferenční rovnice

Definice. Necht' $k \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}$, $p_k \neq 0$, a necht' dále $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. *Lineární diferenční rovnici k -tého řádu s konstantními koeficienty* budeme rozumět rovnici

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \dots + p_k y(n) = a_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

kde neznámou je posloupnost $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$.

Řešením rovnice (1) rozumíme každou posloupnost $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$ splňující (1) pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pokud chceme, aby řešení rovnice (1) splňovalo podmínky

$$y(1) = y_1, \dots, y(k) = y_k, \quad (2)$$

kde čísla $y_1, \dots, y_k \in \mathbb{R}$ jsou předem dána (tzv. *počáteční podmínky*), pak hovoříme o *počáteční úloze*. Pokud $a_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak rovnice (1) má tvar

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \dots + p_k y(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Tato rovnice se nazývá *homogenní*.

Věta 1. *Počáteční úloha (1), (2) má právě jedno řešení.*

Věta 2. *Množina řešení rovnice (3) tvoří vektorový podprostor dimenze k prostoru všech reálných posloupností.*

Poznámka. Bázi prostoru řešení rovnice (3) se říká též *fundamentální systém řešení rovnice (3)*.

Definice. *Charakteristickým polynomem rovnice (3) budeme rozumět polynom*

$$\lambda \mapsto \lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \dots + p_{k-1} \lambda + p_k.$$

Věta 3. *Necht' $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ jsou všechny navzájem různé reálné kořeny charakteristického polynomu rovnice (3) s násobnostmi r_1, \dots, r_s . Necht' ξ_1, \dots, ξ_l jsou všechny navzájem různé kořeny charakteristického polynomu rovnice (3) s kladnou imaginární částí a násobnostmi q_1, \dots, q_l , přičemž $\xi_j = \mu_j (\cos v_j + i \sin v_j)$, $\mu_j > 0$, $v_j \in (0, 2\pi)$, $j = 1, \dots, l$. Pak následující posloupnosti tvoří bázi prostoru řešení rovnice (3):*

$$\begin{array}{llll} \{\lambda_1^n\}, & \{n\lambda_1^n\}, & \dots & \{n^{r_1-1}\lambda_1^n\}, \\ & & & \vdots \\ \{\lambda_s^n\}, & \{n\lambda_s^n\}, & \dots & \{n^{r_s-1}\lambda_s^n\}, \\ \{\mu_1^n \cos v_1 n\}, & \{n\mu_1^n \cos v_1 n\}, & \dots & \{n^{q_1-1}\mu_1^n \cos v_1 n\}, \\ \{\mu_1^n \sin v_1 n\}, & \{n\mu_1^n \sin v_1 n\}, & \dots & \{n^{q_1-1}\mu_1^n \sin v_1 n\}, \\ & & & \vdots \\ \{\mu_l^n \cos v_l n\}, & \{n\mu_l^n \cos v_l n\}, & \dots & \{n^{q_l-1}\mu_l^n \cos v_l n\}, \\ \{\mu_l^n \sin v_l n\}, & \{n\mu_l^n \sin v_l n\}, & \dots & \{n^{q_l-1}\mu_l^n \sin v_l n\} \end{array}$$

Věta 4. *Necht' posloupnosti $\{y^1(n)\}_{n=1}^{\infty}, \{y^2(n)\}_{n=1}^{\infty}, \dots, \{y^k(n)\}_{n=1}^{\infty}$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (3). Necht' posloupnost $\{z(n)\}_{n=1}^{\infty}$ je řešením rovnice (1). Potom posloupnost $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$ řeší rovnici (1), právě když existují konstanty $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ takové, že*

$$y(n) = z(n) + c_1 y^1(n) + \dots + c_k y^k(n)$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Řešení $\{z(n)\}_{n=1}^{\infty}$ z předchozí věty se tradičně nazývá *partikulární řešení*.

Věta 5 (rovnice se speciální pravou stranou). *Necht' posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ v rovnici (1) splňuje*

$$a_n = \alpha^n (P(n) \cos(vn) + Q(n) \sin(vn)),$$

kde $\alpha, v \in \mathbb{R}$ a P, Q jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice (1) ve tvaru

$$z(n) = n^m \alpha^n (R(n) \cos(vn) + S(n) \sin(vn)),$$

kde R a S jsou vhodné polynomy stupně ne většího než $\max\{\text{st } P, \text{st } Q\}$ a $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ udává, jakou násobnost má číslo $\alpha(\cos v + i \sin v)$ jakožto kořen charakteristického polynomu rovnice (3).

XIII. Základní pojmy teorie diferenciálních rovnic

XIII. Základní pojmy teorie diferenciálních rovnic

Definice. *Diferenciální rovnici* rozumíme rovnici tvaru

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (4)$$

kde F je reálná funkce $n + 2$ proměnných.

Řešením diferenciální rovnice (4) rozumíme funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I , která má v každém bodě intervalu I vlastní n -tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (4) v každém bodě intervalu I , tj. pro každé $x \in I$ platí

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

Definice. Je-li funkce y řešením rovnice (4) na intervalu I a funkce \tilde{y} řešením rovnice (4) na intervalu \tilde{I} , kde $I \subset \tilde{I}$, $I \neq \tilde{I}$ a $y(x) = \tilde{y}(x)$ pro všechna $x \in I$, pak říkáme, že řešení \tilde{y} je *prodloužením řešení* y na interval \tilde{I} .

Řešení rovnice (4), které nemá prodloužení, nazýváme *maximálním řešením* rovnice (4).

Definice. Rovnice tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

kde f je reálná funkce $n + 1$ proměnných, se nazývá *diferenciální rovnice (n -tého řádu) vyřešená vzhledem k nejvyšší derivaci*.

XIV. Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

XIV.1. Základní metoda řešení

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru

$$y' = g(y)h(x). \quad (5)$$

Metoda řešení pro g a h spojitě na svých definičních oborech

1. Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce h . (Tím máme vymezeny maximální intervaly, na kterých můžeme hledat řešení.)

2. Najdeme všechny nulové body funkce g . Je-li $g(c) = 0$, pak na každém intervalu z 1. kroku je funkce $y(x) = c$ tzv. *singulárním* (též *stacionárním*) řešením rovnice (5).

3. Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je funkce g nenulová.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J ze 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je na J spojitá a nenulová. Budeme hledat řešení rovnice (5), jejichž definiční obor je obsažen v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J . Je-li y takové řešení, pak pro každé $x \in D_y$ platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Nechť H je primitivní funkce k funkci h na intervalu I a G je primitivní funkce k funkci $1/g$ na J . Potom existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ taková, že platí

$$G(y(x)) = H(x) + C$$

na definičním oboru řešení y , který nalezneme v následujícím kroku.

5. Nyní zafixujeme C a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I; H(x) + C \in G(J)\}.$$

Na každém z těchto intervalů řešení musí mít tvar

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + C),$$

kde G^{-1} značí funkci inverzní k funkci G . Ta existuje, neboť G je na intervalu J buď rostoucí nebo klesající.

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku „slepíme“ všechna maximální řešení rovnice (5). Necht' y_1 a y_2 jsou řešení rovnice (5), první na intervalu (a, b) a druhé na intervalu (b, c) , přičemž $b \in D_h$. Předpokládejme, že

$$\lim_{x \rightarrow b^-} y_1(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} y_2(x) = \alpha \in D_g.$$

Pak funkce

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a, b); \\ \alpha, & x = b; \\ y_2(x), & x \in (b, c); \end{cases}$$

je řešením rovnice (5) na intervalu (a, c) .

XIV.2. Autonomní diferenciální rovnice

Autonomní diferenciální rovnice jsou diferenciální rovnice nezávislé explicitně na proměnné x (na „čase“). Autonomní diferenciální rovnice prvního řádu vyřešená vzhledem k nejvyšší derivaci je tedy rovnice tvaru

$$y' = g(y). \quad (6)$$

Věta 6. Každé řešení rovnice (6), kde g je libovolná funkce, je monotónní.

Poznámka. Je-li funkce y řešením rovnice (6) na intervalu (a, b) , pak pro každé $c \in \mathbb{R}$ je funkce $x \mapsto y(x+c)$, $x \in (a-c, b-c)$, rovněž jejím řešením.

Lemma 7. Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, funkce g je spojitá a kladná na (a, b) a má v bodě b zleva kladnou limitu. Pak $\int_a^b \frac{1}{g}$ konverguje.

Lemma 8. Necht' funkce g je spojitá na (a, b) , kladná na (a, b) , $g(b) = 0$ a $g'_-(b)$ existuje vlastní. Pak $\int_a^b \frac{1}{g}$ diverguje.

XV. Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Lineární diferenciální rovnici prvního řádu rozumíme rovnicí tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (7)$$

kde p, q jsou funkce na daném intervalu (a, b) .

V dalším budeme předpokládat, že p, q jsou spojité funkce. Pak každé řešení rovnice (7) je třídy \mathcal{C}^1 .

Zobrazení $L: C^1(a, b) \rightarrow C(a, b)$,

$$L(y) = y' + py$$

je lineární.

XV.1. Homogenní rovnice

Homogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu budeme rozumět rovnicí tvaru

$$y' + p(x)y = 0.$$

Maximální řešení homogenní rovnice:

$$y(x) = Ke^{-P(x)}, \quad x \in (a, b), \quad K \in \mathbb{R},$$

kde P je primitivní funkce k p na intervalu (a, b) .

Všechna řešení homogenní rovnice tvoří vektorový podprostor prostoru $C^1(a, b)$ dimenze 1 ($\dim \text{Ker } L = 1$).

XV.2. Nehomogenní rovnice

Maximální řešení rovnice (7):

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^x q(t)e^{P(t)} dt \right) e^{-P(x)} + Ke^{-P(x)}, \quad x \in (a, b), \quad K \in \mathbb{R},$$

kde $x_0 \in (a, b)$ a P je primitivní funkce k p na intervalu (a, b) .

Maximální řešení rovnice (7) splňující počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$:

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^x q(t)e^{P(t)} dt \right) e^{-P(x)} + y_0 e^{-P(x)}, \quad x \in (a, b),$$

kde $P(x_0) = 0$, tj. $P(x) = \int_{x_0}^x p(t) dt$. Pro každé $x_0 \in (a, b)$ a každé $y_0 \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno maximální řešení y rovnice (7), které splňuje počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$. Toto řešení je navíc definováno na celém (a, b) .

XVI. Lineární diferenciální rovnice

Definice. Lineární diferenciální rovnici n -tého řádu rozumíme rovnici

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t), \quad (8)$$

kde a_0, \dots, a_{n-1} a f jsou funkce spojité na daném intervalu (a, b) .

Homogenní rovnici příslušnou k rovnici (8) rozumíme rovnici

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0. \quad (9)$$

Každé řešení rovnice (8) je třídy \mathcal{C}^n .

Zobrazení $L: C^n(a, b) \rightarrow C(a, b)$,

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y$$

je lineární.

XVI.1. Struktura prostoru řešení

Věta 9. Necht' $t_0 \in (a, b)$ a $z_0, \dots, z_{n-1} \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jedno maximální řešení y rovnice (8), které splňuje podmínky

$$y(t_0) = z_0, \quad y'(t_0) = z_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}.$$

Toto řešení je navíc definováno na celém intervalu (a, b) .

Věta 10.

(i) Množina všech maximálních řešení rovnice (9) tvoří vektorový podprostor prostoru $C^n((a, b))$ dimenze n .

(ii) Necht' y_p je nějaké maximální řešení rovnice (8). Pak množina všech maximálních řešení rovnice (8) má tvar

$$\{y_p + y_h; \quad y_h \text{ je řešením rovnice (9) na intervalu } (a, b)\}.$$

Poznámka.

- Báze prostoru maximálních řešení rovnice (9) se nazývá *fundamentální systém řešení rovnice (9)*.
- Jsou-li funkce y_1, \dots, y_n lineárně nezávislá maximální řešení rovnice (9), pak již tvoří fundamentální systém.
- Abychom vyřešili nehomogenní rovnici (8), najdeme fundamentální systém y_1, \dots, y_n pro rovnici (9) a jedno („partikulární“) řešení y_p rovnice (8). Všechna řešení rovnice (8) pak budou mít tvar $y = y_p + c_1y_1 + \dots + c_ny_n$, kde $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

XVI.2. Metoda variace konstant

Věta 11 (variace konstant). Necht' funkce y_1, \dots, y_n tvoří fundamentální systém řešení rovnice (9). Existují-li funkce c_1, \dots, c_n mající na (a, b) vlastní derivaci a splňující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} c_1'y_1 + \dots + c_n'y_n &= 0 \\ &\vdots \\ c_1'y_1^{(n-2)} + \dots + c_n'y_n^{(n-2)} &= 0 \\ c_1'y_1^{(n-1)} + \dots + c_n'y_n^{(n-1)} &= f \end{aligned}$$

na intervalu (a, b) , pak funkce $y_p(t) = c_1(t)y_1(t) + \dots + c_n(t)y_n(t)$, $t \in (a, b)$, je řešením rovnice (8).

Definice. Necht' funkce y_1, \dots, y_n tvoří fundamentální systém řešení rovnice (9). Pak matici (či přesněji maticovou funkci)

$$U(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in (a, b)$$

nazýváme *fundamentální maticí* rovnice (9).

Věta 12. Necht' $U(t)$ je fundamentální maticí rovnice (9). Pak matice $U(t)$ je regulární pro každé $t \in (a, b)$.

XVI.3. Rovnice s konstantními koeficienty

Definice. Lineární diferenciální rovnici n -tého řádu s konstantními koeficienty rozumíme rovnici

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = f(t), \quad (10)$$

kde $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ a f je funkce spojitá na daném intervalu (a, b) .

Homogenní rovnici příslušnou k rovnici (10) rozumíme rovnici

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0. \quad (11)$$

Poznámka. Maximální řešení rovnice (11) jsou definována na celém \mathbb{R} .

Definice. Charakteristickým polynomem rovnice (11) rozumíme polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

Věta 13 (tvar fundamentálního systému). *Necht' χ je charakteristický polynom rovnice (11).*

Necht' $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ jsou všechny navzájem různé reálné kořeny polynomu χ s násobnostmi r_1, \dots, r_s . Necht' $\alpha_1 + \beta_1 i, \dots, \alpha_l + \beta_l i$ jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu χ s kladnou imaginární částí a násobnostmi q_1, \dots, q_l , kde $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{R}$. Pak následující funkce tvoří fundamentální systém řešení rovnice (11):

$$\begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 t}, & t e^{\lambda_1 t}, & \dots & t^{r_1-1} e^{\lambda_1 t}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\lambda_s t}, & t e^{\lambda_s t}, & \dots & t^{r_s-1} e^{\lambda_s t}, \\ e^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t, & t e^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1} e^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t, \\ e^{\alpha_1 t} \sin \beta_1 t, & t e^{\alpha_1 t} \sin \beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1} e^{\alpha_1 t} \sin \beta_1 t, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\alpha_l t} \cos \beta_l t, & t e^{\alpha_l t} \cos \beta_l t, & \dots & t^{q_l-1} e^{\alpha_l t} \cos \beta_l t, \\ e^{\alpha_l t} \sin \beta_l t, & t e^{\alpha_l t} \sin \beta_l t, & \dots & t^{q_l-1} e^{\alpha_l t} \sin \beta_l t \end{array}$$

Věta 14 (speciální pravá strana). *Necht'*

$$f(t) = e^{\mu t} \cdot (P(t) \cos \nu t + Q(t) \sin \nu t), \quad t \in \mathbb{R},$$

kde $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ a P, Q jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice (10) ve tvaru

$$y_p(t) = t^m e^{\mu t} \cdot (R(t) \cos \nu t + S(t) \sin \nu t), \quad t \in \mathbb{R},$$

kde R, S jsou polynomy stupně ne většího než $\max\{\text{st } P, \text{st } Q\}$ a $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ udává, jakou násobnost má číslo $\mu + i\nu$ jakožto kořen charakteristického polynomu příslušné homogenní rovnice.

XVII. Soustavy diferenciálních rovnic

Soustavou diferenciálních rovnic (prvního řádu) rozumíme soustavu

$$\begin{aligned}x'_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\x'_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\&\vdots \\x'_n &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n),\end{aligned}\tag{12}$$

kde f_i , $i = 1, \dots, n$, jsou dané funkce definované na neprázdné otevřené množině $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a hledaným objektem jsou funkce x_1, \dots, x_n definované na jistém otevřeném intervalu.

XVII.1. Základní pojmy, věta o existenci a jednoznačnosti

Vektorový tvar soustavy:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}),\tag{13}$$

kde $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, $\mathbf{x}' = [x'_1, x'_2, \dots, x'_n]$ a $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_n]$.

Definice. • Řešením soustavy (12) rozumíme vektorovou funkci $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$ definovanou na otevřeném neprázdném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ s hodnotami v \mathbb{R}^n takovou, že pro každé $t \in I$ existují vlastní derivace $x'_1(t), \dots, x'_n(t)$, a platí $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$.

- **Maximální řešení** soustavy (12) je takové řešení \mathbf{x} definované na intervalu I , které již nelze prodloužit, tj. je-li \mathbf{y} řešení definované na intervalu J , $I \subset J$ a $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t)$ pro každé $t \in I$, pak $J = I$.
- **Počáteční úlohou** pro (12) rozumíme úlohu, kdy hledáme řešení \mathbf{x} soustavy (12) splňující navíc předem zadanou podmínku $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$, kde $[t_0, \mathbf{x}^0] \in G$ (tzv. *počáteční podmínka*).

Věta 15 (Peanova věta o existenci řešení). *Nechť $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je otevřená neprázdná množina a $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá na G . Pak pro každé $[t_0, \mathbf{x}^0] \in G$ existuje maximální řešení \mathbf{x} rovnice (13) splňující $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$.*

Věta 16 (o existenci a jednoznačnosti řešení). *Nechť $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je otevřená neprázdná množina a $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá na G a navíc splňuje následující podmínku:*

(D) Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí, že parciální derivace f_i podle druhé, třetí, \dots , $(n+1)$ -ní proměnné (tj. $\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}$) jsou spojitě na G .

Jestliže $[t_0, \mathbf{x}^0] \in G$, potom existuje právě jedno maximální řešení \mathbf{x} rovnice (13) splňující $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$.

XVII.2. Vlastnosti maximálních řešení

Věta 17 (opouštění kompaktu). *Nechť $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je neprázdná a otevřená množina, zobrazení $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitě, \mathbf{x} je maximální řešení rovnice (13) definované na intervalu (α, β) , $t_0 \in (\alpha, \beta)$, $K \subset G$ je kompaktní a $[t_0, \mathbf{x}(t_0)] \in K$. Pak existují $\tau_1 \in (\alpha, t_0)$ a $\tau_2 \in (t_0, \beta)$ taková, že $[\tau_1, \mathbf{x}(\tau_1)] \notin K$ a $[\tau_2, \mathbf{x}(\tau_2)] \notin K$.*

Lemma 18. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a funkce g je definovaná na intervalu (a, b) . Funkce g má v bodě b zleva vlastní limitu právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall s, t \in P^-(b, \delta): |g(t) - g(s)| < \varepsilon.$$

Věta 19 (spojitá závislost na počátečních podmínkách). *Nechť $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je neprázdná otevřená množina, $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitě a splňuje na G podmínku (D) z Věty 16. Nechť \mathbf{x} je maximální řešení soustavy (13) definované na (α, β) a $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Nechť dále $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle \subset (\alpha, \beta)$ je uzavřený interval obsahující t_0 . Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $\mathbf{y}^0 \in \mathbb{R}^n$ splňující $\|\mathbf{y}^0 - \mathbf{x}(t_0)\| < \delta$ platí: Každé maximální řešení \mathbf{y} soustavy (13) splňující počáteční podmínku $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0$ je definované na intervalu obsahujícím $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ a platí $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| < \varepsilon$ pro každé $t \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$.*

Lemma 20 (ekvivalence diferenciální a integrální rovnice). *Nechť $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je otevřená, $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitě zobrazení, $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $[t_0, \mathbf{x}^0] \in G$. Spojitá vektorová funkce $\mathbf{x} : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ je řešením rovnice (13) s počáteční podmínkou $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$, právě když pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ splňuje rovnici*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds.$$

Lemma 21 (Gronwall). *Necht' funkce u je spojitá na intervalu $\langle t_0, t_1 \rangle$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $t_1 \in \mathbb{R}^*$. Necht' existují čísla $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ taková, že*

$$u(t) \leq a + \int_{t_0}^t (\alpha u(s) + \beta) ds, \quad t \in \langle t_0, t_1 \rangle.$$

Pak

$$u(t) \leq \left(a + \frac{\beta}{\alpha} \right) e^{\alpha(t-t_0)}, \quad t \in \langle t_0, t_1 \rangle.$$

Lemma 22. *Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\mathbf{x}: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá a $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Necht' platí*

$$\{[t, \mathbf{x}(t)] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; t \in \langle a, b \rangle\} \subset G.$$

Potom existuje $\xi > 0$ takové, že

$$\{[t, \mathbf{z}] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; t \in \langle a, b \rangle, \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}\| \leq \xi\} \subset G.$$

Lemma 23. *Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\mathbf{x}: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá. Potom platí*

$$\left\| \int_a^b \mathbf{x}(t) dt \right\| \leq n \int_a^b \|\mathbf{x}(t)\| dt.$$

Lemma 24. *Necht' $G \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná a otevřená a $\mathbf{g} \in C^1(G, \mathbb{R}^m)$. Necht' dále $C \subset G$ je konvexní a předpokládejme, že existuje $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, takové, že*

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \forall j \in \{1, \dots, n\} \forall \mathbf{x} \in C: \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right| \leq M.$$

Potom pro každé dva body $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C$ platí

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{u}) - \mathbf{g}(\mathbf{v})\| \leq L \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|,$$

kde $L = n\sqrt{m}M$.

XVII.3. Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

Soustavou lineárních diferenciálních rovnic rozumíme soustavu tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ x_2' &= a_{21}(t)x_1 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t), \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \end{aligned}$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_{ij}: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$, $b_i: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, jsou spojitě funkce. Vektorový tvar soustavy:

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \tag{14}$$

kde

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Věta 25 (existence a jednoznačnost řešení). *Necht' $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $\mathbf{y}^0 \in \mathbb{R}^n$. Necht' $A: (\alpha, \beta) \rightarrow M(n \times n)$, $\mathbf{b}: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou spojitá zobrazení. Potom existuje právě jedno maximální řešení \mathbf{y} soustavy (14) splňující $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0$. Toto řešení je navíc definováno na celém intervalu (α, β) .*

Definice. *Homogenní soustavou k soustavě (14) rozumíme soustavu*

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}. \tag{15}$$

Zobrazení $L: C^1((\alpha, \beta), \mathbb{R}^n) \rightarrow C((\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$,

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' - A\mathbf{x}$$

je lineární.

Věta 26. Necht' $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha < \beta$, a $A: (\alpha, \beta) \rightarrow M(n \times n)$ je spojité zobrazení. Potom množina všech maximálních řešení homogenní soustavy (15) tvoří vektorový podprostor prostoru $C^1((\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$. Dimenze tohoto podprostoru je rovna n .

Věta 27. Necht' $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha < \beta$, a $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$. Necht' $A: (\alpha, \beta) \rightarrow M(n \times n)$, $\mathbf{b}: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou spojitá zobrazení. Necht' \mathbf{y} je řešení soustavy (14) na intervalu (α, β) . Potom každé řešení \mathbf{x} soustavy (14) na intervalu (α, β) má tvar $\mathbf{y} + \mathbf{z}$, kde \mathbf{z} je jisté řešení soustavy (15) na intervalu (α, β) .

Definice. Bázi prostoru maximálních řešení soustavy (15) nazýváme *fundamentální systém* soustavy (15). Je-li $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^n$ fundamentální systém soustavy (15), pak matici

$$\Phi(t) = (\mathbf{y}^1(t), \dots, \mathbf{y}^n(t)) = \begin{pmatrix} y_1^1(t) & \dots & y_1^n(t) \\ y_2^1(t) & \dots & y_2^n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^1(t) & \dots & y_n^n(t) \end{pmatrix}$$

nazýváme *fundamentální matice* soustavy (15).

Věta 28. Necht' Φ je fundamentální matice soustavy (15). Pak matice $\Phi(t)$ je regulární pro každé $t \in (\alpha, \beta)$.

Věta 29 (variací konstant). Necht' $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $\mathbf{y}^0 \in \mathbb{R}^n$. Necht' $A: (\alpha, \beta) \rightarrow M(n \times n)$ a $\mathbf{b}: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou spojitá zobrazení. Pak maximální řešení \mathbf{y} rovnice (14) s počáteční podmínkou $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0$ má tvar

$$\mathbf{y}(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}\mathbf{y}^0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1}\mathbf{b}(s) ds, \quad t \in (\alpha, \beta),$$

kde Φ je fundamentální matice soustavy (15).

XVII.4. Řešení lineárních soustav s konstantními koeficienty

Soustava lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty je soustava

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t),$$

kde $A \in M(n \times n)$ a $\mathbf{b}: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ je daná (spojitá) vektorová funkce. Příslušná *homogenní* soustava je soustava

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}. \tag{16}$$

Tvrzení 30. Necht' $A \in M(n \times n)$ a vektorová funkce $\mathbf{y}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ je řešením soustavy (16). Pak $\mathbf{y} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\mathbf{y}^{(k)}(t) = A^k \mathbf{y}(t)$ pro $t \in \mathbb{R}$.

Definice.

- Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ , nazýváme λ -maticí.
- Řádkovými úpravami λ -matice rozumíme:
 - záměnu dvou řádků,
 - vynásobení řádku nenulovou konstantou,
 - přičtení $P(\lambda)$ -násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde $P(\lambda)$ je polynom v proměnné λ .

Věta 31. Necht' $A \in M(n \times n)$. Pak lze λ -matici $\lambda I - A$ převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou λ -matici. Výsledná λ -matice má na diagonále nenulové polynomy, součet jejichž stupňů je n .