VIII. Primitivní funkce a Riemannův integrál

VIII.2. Primitivní funkce

Definice. Nechť funkce f je definována na neprázdném otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce $F\colon I \to \mathbb{R}$ je *primitivní funkce k f na I*, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Věta 1. *Nechť F a G jsou primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.*

Poznámka. Množinu všech primitivních funkcí k funkci f značíme symbolem

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Skutečnost, že F je primitivní funkcí k f na I zapisujeme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} F(x), \quad x \in I.$$

Věta. *Nechť f je spojitá funkce na intervalu (a,b) a nechť $c \in (a,b)$. Označíme-li $F(x) = \int\limits_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pro $x \in (a,b)$, pak $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a,b)$, neboli funkce F je primitivní k f na (a,b).*

Důsledek 2. *Nechť f je spojitá funkce na neprázdném otevřeném intervalu I. Pak f má na I primitivní funkci.*

Věta 3 (Newtonův-Leibnizův vzorec)**.** *Nechť f je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$, $a < b$, a nechť F je primitivní funkce k f na (a,b). Pak existují vlastní limity* $\lim_{x\to a+} F(x)$, $\lim_{x\to b-} F(x)$ *a platí*

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x).$$

Věta 4. *Nechť funkce f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F, funkce g má na I primitivní funkci G a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I.*

Primitivní funkce k některým důležitým funkcím

- $\displaystyle\int x^n\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ na $\mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$ pro $n \in \mathbb{Z}$, $n < -1$,
- $\displaystyle\int x^\alpha\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ na $(0,+\infty)$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \log|x|$ na $(0,+\infty)$ a na $(-\infty,0)$,
- $\displaystyle\int e^x\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} e^x$ na $\mathbb{R}$,
- $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} -\cos x$ na $\mathbb{R}$,
- $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \sin x$ na $\mathbb{R}$,
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \operatorname{tg} x$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} -\operatorname{cotg} x$ na každém z intervalů $(k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \operatorname{arctg} x$ na $\mathbb{R}$,
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \arcsin x$ na $(-1,1)$,

- $\displaystyle\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \arccos x$ na $(-1,1)$.

Věta 5 (o substituci)**.**

(i) *Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b). Nechť je φ funkce definovaná na (α,β) s hodnotami v intervalu (a,b), která má v každém bodě intervalu (α,β) vlastní derivaci. Pak*

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} F\big(\varphi(x)\big) \quad \textit{na } (\alpha,\beta).$$

(ii) *Nechť funkce φ má v každém bodě intervalu (α,β) vlastní derivaci, která je buď všude kladná, nebo všude záporná, a $\varphi\big((\alpha,\beta)\big) = (a,b)$. Nechť funkce f je definovaná na intervalu (a,b) a platí*

$$\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \overset{c}{=} G(t) \quad \textit{na } (\alpha,\beta).$$

Pak

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} G\big(\varphi^{-1}(x)\big) \quad \textit{na } (a,b).$$

Věta 6 (integrace per partes)**.** *Nechť I je neprázdný otevřený interval, funkce f a g jsou spojité na I, F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I. Pak platí*

$$\int f(x)G(x)\,\mathrm{d}x = F(x)G(x) - \int F(x)g(x)\,\mathrm{d}x \quad \textit{na } I.$$

Příklad. Označme $I_n = \displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n, x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},\\ I_1 &\overset{c}{=} \operatorname{arctg} x, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Definice. *Racionální funkcí* budeme rozumět podíl dvou polynomů, kde polynom ve jmenovateli není nulový.

Věta („základní věta algebry“)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Pak rovnice*

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

má alespoň jedno řešení $z \in \mathbb{C}$.

Lemma 7 (o dělení polynomů)**.** *Nechť P a Q jsou dva polynomy (s komplexními koeficienty), přičemž polynom Q není nulový. Pak existují jednoznačně určené polynomy R a Z splňující:*

- $\operatorname{st} Z < \operatorname{st} Q$,
- $P(x) = R(x)Q(x) + Z(x)$ *pro všechna* $x \in \mathbb{C}$.

Pokud mají P a Q reálné koeficienty, mají i R a Z reálné koeficienty.

Důsledek. *Je-li P polynom a $\lambda \in \mathbb{C}$ jeho kořen (tj. $P(\lambda) = 0$), pak existuje polynom R splňující $P(x) = (x-\lambda)R(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{C}$.*

Věta 8 (rozklad na kořenové činitele)**.** *Nechť $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně $n \in \mathbb{N}$. Pak existují čísla $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ taková, že*

$$P(x) = a_n(x-x_1)\cdots(x-x_n), \quad x \in \mathbb{C}.$$

Definice. Nechť P je nenulový polynom, $\lambda \in \mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že λ je *kořen násobnosti k* polynomu P, jestliže existuje polynom R splňující $R(\lambda) \neq 0$ a $P(x) = (x-\lambda)^k R(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{C}$.

Věta 9 (o kořenech polynomu s reálnými koeficienty)**.** *Nechť P je polynom s reálnými koeficienty a $\lambda \in \mathbb{C}$ je kořen polynomu P násobnosti $k \in \mathbb{N}$. Pak i komplexně sdružené číslo $\overline{\lambda}$ je kořen polynomu P násobnosti k.*

Věta 10 (rozklad polynomu s reálnými koeficienty)**.** *Nechť $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně n s reálnými koeficienty. Pak existují reálná čísla $x_1, \dots, x_k$, $\alpha_1, \dots, \alpha_l$, $\beta_1, \dots, \beta_l$ a přirozená čísla $p_1, \dots, p_k$, $q_1, \dots, q_l$ taková, že*

- $P(x) = a_n(x-x_1)^{p_1}\cdots(x-x_k)^{p_k}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}\cdots(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}$,

- *žádné dva z polynomů $x - x_1, x - x_2, \dots, x - x_k$, $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají společný kořen,*
- *polynomy $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají žádný reálný kořen.*

Věta 11 (rozklad na parciální zlomky)**.** *Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$ a nechť*

$$Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_k)^{p_k} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \cdots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$$

je rozklad polynomu Q z Věty 10. Pak existují jednoznačně určená reálná čísla $A_1^1, \dots, A_{p_1}^1, \dots, A_1^k, \dots, A_{p_k}^k$, $B_1^1, C_1^1, \dots, B_{q_1}^1, C_{q_1}^1, \dots, B$ taková, že platí

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1^1}{(x-x_1)} + \cdots + \frac{A_{p_1}^1}{(x-x_1)^{p_1}} + \cdots + \frac{A_1^k}{(x-x_k)} + \cdots + \frac{A_{p_k}^k}{(x-x_k)^{p_k}} + \\ & + \frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)} + \cdots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}} + \cdots + \\ & + \frac{B_1^l x + C_1^l}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)} + \cdots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}}, x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_k\}.\end{aligned}$$

Poznámka. Označme

$$[F]_a^b = \begin{cases} \lim_{x \to b-} F(x) - \lim_{x \to a+} F(x) & \text{pro } a < b, \\ \lim_{x \to b+} F(x) - \lim_{x \to a-} F(x) & \text{pro } b < a. \end{cases}$$

Pak lze Newtonův-Leibnizův vzorec zapsat jako

$$\int_a^b f = [F]_a^b$$

a to i pro $b < a$.

Věta 12 (integrace per partes)**.** *Nechť funkce f, g, f' a g' jsou spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$.Pak platí*

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'.$$

Věta 13 (substituce)**.** *Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť dále funkce φ má na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ spojitou derivaci a zobrazuje jej do intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak*

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Věta (zavedení logaritmu)**.** *Existuje jediná funkce $\log$, která má tyto vlastnosti:*

(L1) $D_{\log} = (0, +\infty)$,

(L2) $\log$ *je rostoucí na* $(0, +\infty)$,

(L3) $\log(xy) = \log x + \log y$ *pro všechna* $x, y \in (0, +\infty)$,

(L4) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1.$

VIII.3. Zobecněný Riemannův integrál

Lemma 14 (spojitost Riemannova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a funkce f má na intervalu $\langle a, b\rangle$ Riemannův integrál. Pak platí*

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b-} \int_a^x f = \lim_{x \to a+} \int_x^b f.$$

Lemma 15. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a funkce f má Riemannův integrál na každém podintervalu $\langle x, y\rangle \subset (a, b)$. Nechť dále $c \in (a, b)$, existují limity $\lim_{x \to a+} \int_x^c f$ a $\lim_{y \to b-} \int_c^y f$ a jejich součet má smysl (tj. je definovaný). Pak pro každé $d \in (a, b)$ existují $\lim_{x \to a+} \int_x^d f$ a $\lim_{y \to b-} \int_d^y f$ a platí*

$$\lim_{x \to a+} \int_x^d f + \lim_{y \to b-} \int_d^y f = \lim_{x \to a+} \int_x^c f + \lim_{y \to b-} \int_c^y f.$$

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť funkce f je definovaná na intervalu (a, b). Má-li funkce f Riemannův integrál na každém podintervalu $\langle x, y\rangle \subset (a, b)$ a existuje-li $c \in (a, b)$ takové, že limity $\lim_{x\to a+} \int_x^c f$ a $\lim_{y\to b-} \int_c^y f$ existují a jejich součet má smysl, pak definujeme *zobecněný Riemannův integrál* funkce f na intervalu (a, b) jako

$$\int_a^b f = \lim_{x\to a+} \int_x^c f + \lim_{y\to b-} \int_c^y f.$$

Poznámka.

- Definice je korektní, neboť hodnota součtu $\lim_{x\to a+} \int_x^c f + \lim_{y\to b-} \int_c^y f$ nezávisí na volbě dělícího bodu $c \in (a, b)$.
- Má-li funkce f Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$, má i zobecněný Riemannův integrál na intervalu (a, b) a oba integrály jsou si rovny.
- Hodnota *zobecněného* Riemannova integrálu může být i $+\infty$ nebo $-\infty$.

Lemma 16. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a funkce f je omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$. Jestliže existuje Riemannův integrál funkce f na každém podintervalu $\langle c, d\rangle \subset (a, b)$, pak existuje i Riemannův integrál funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$.*

Lemma 17. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, f je nezáporná na (a, b) a f má Riemannův integrál na každém podintervalu $\langle x, y\rangle \subset (a, b)$. Potom f má zobecněný Riemannův integrál na (a, b).*

Věta 18. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$ a $c \in (a, b)$.*

(i) Jestliže funkce f má zobecněný Riemannův integrál na (a, b), pak má f zobecněný Riemannův integrál i na (a, c) a (c, b) a platí

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

(ii) Nechť funkce f má zobecněný Riemannův integrál na (a, c) a (c, b), f je omezená na nějakém okolí bodu c a součet $\int_a^c f + \int_c^b f$ má smysl. Pak f má zobecněný Riemannův integrál na (a, b) a platí

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Věta 19 (linearita zobec. Riemannova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, f a g jsou funkce mající zobecněný Riemannův integrál na intervalu (a, b) a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom*

(i) funkce αf má zobecněný Riemannův integrál na (a, b) a platí

$$\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f,$$

má-li pravá strana smysl,

(ii) je-li součet $\int_a^b f + \int_a^b g$ definovaný, pak má funkce $f + g$ zobecněný Riemannův integrál na (a, b) a platí

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Věta 20. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť f a g jsou funkce mající zobecněný Riemannův integrál na intervalu (a, b). Potom platí:*

(i) Je-li $f(x) \le g(x)$ pro každé $x \in (a, b)$, pak

$$\int_a^b f \le \int_a^b g.$$

(ii) Funkce $|f|$ má zobecněný Riemannův integrál na (a, b) a platí

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|.$$

Věta 21 (Newtonův vzorec)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, f je spojitá na (a, b), a F je primitivní funkce k f na (a, b). Pak zobecněný Riemannův integrál funkce f na (a, b) existuje právě když existují limity $\lim_{x\to a+} F(x)$ a $\lim_{x\to b-} F(x)$ a jejich rozdíl má smysl. V tomto případě platí*

$$\int_a^b f = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x).$$

Pokud existuje zobecněný Riemannův integrál funkce f na intervalu (a, b) a přitom je konečný, pak říkáme, že $\int_a^b f$ *konverguje*. Pokud je roven $+\infty$ nebo $-\infty$, pak říkáme, že *diverguje*. Máme pak následující možnosti:

$$\int_a^b f \begin{cases} \text{existuje a je roven} \begin{cases} \text{reálnému číslu, tj. konverguje,} \\ +\infty \text{ nebo } -\infty\text{, tj. diverguje,} \end{cases} \\ \text{neexistuje.} \end{cases}$$

Věta 22 (srovnávací kritérium)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, funkce f a g splňují $0 \le f(x) \le g(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$ a f je na (a, b) spojitá. Pokud konverguje $\int_a^b g$, pak konverguje i $\int_a^b f$.*

Věta 23 (limitní srovnávací kritérium)**.** *Nechť f a g jsou spojité nezáporné funkce na intervalu $\langle a, b)$, $b \in \mathbb{R}^*$, a existuje limita $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma \in \mathbb{R}^*$.*

- *Je-li $\gamma \in (0, +\infty)$, pak $\int_a^b f$ konverguje, právě když konverguje $\int_a^b g$.*
- *Je-li $\gamma = 0$, pak z konvergence $\int_a^b g$ plyne konvergence $\int_a^b f$.*
- *Je-li $\gamma = +\infty$, pak z divergence $\int_a^b g$ plyne divergence $\int_a^b f$.*

VIII.4. Míra a integrál v $\mathbb{R}^n$

Zavedení pojmu Riemannova integrálu bylo mj. motivováno snahou umět změřit plochu pod grafem některých funkcí. Rádi bychom tento pojem plochy dále rozšířili tak, aby bylo možné např. měřit mnohem obecnější podmnožiny $\mathbb{R}^2$, případně $\mathbb{R}^n$. Ukazuje se však, že takovýto pojem „míry množiny“ nelze zavést tak, aby měl rozumné vlastnosti od něj očekávané a zároveň uměl změřit *všechny* podmnožiny $\mathbb{R}^n$. (Viz též Banachův-Tarského paradox.) Proto zavádíme následující definici.

Definice. Nechť $\mathcal{A}$ je nějaký systém podmnožin $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\mathcal{A}$ je *σ-algebra*, jestliže platí:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(ii) je-li $A \in \mathcal{A}$, pak také $\mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{A}$,

(iii) jsou-li $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, pak také $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{A}$.

Z definice je ihned vidět, že $\mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$ a jsou-li $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, pak také $\bigcap_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{A}$ (plyne z de Morganových pravidel). Dále, jsou-li $A, B \in \mathcal{A}$, pak také $B \setminus A \in \mathcal{A}$.

Definice. Nechť $\mathcal{A}$ je σ-algebra podmnožin $\mathbb{R}^n$. Zobrazení $\mu\colon \mathcal{A} \to \langle 0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ se nazývá míra, jestliže $\mu(\emptyset) = 0$, a jestliže je *σ-aditivní*, tj. pokud $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ jsou po dvou disjunktní, pak $\mu(\bigcup_{j=1}^\infty A_j) = \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j)$.

Z definice plyne, že μ je monotónní, tj. $\mu(A) \le \mu(B)$ pro každé dvě množiny $A, B \in \mathcal{A}$ splňující $A \subset B$.
Množinám z $\mathcal{A}$ se říká *měřitelné* (případně μ-měřitelné) množiny.

Věta 24. *Existuje právě jedna σ-algebra Λ na $\mathbb{R}^n$ a právě jedna míra λ na Λ mající následující vlastnosti:*

(i) Λ obsahuje všechny otevřené podmnožiny $\mathbb{R}^n$;

(ii) jestliže $A, B \in \Lambda$, $A \subset E \subset B$, a $\lambda(B \setminus A) = 0$, pak $E \in \Lambda$;

(iii) je-li $I = \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n\rangle \subset \mathbb{R}^n$, pak $\lambda(I) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$;

(iv) λ je translačně invariantní, tj. $\lambda(x + A) = \lambda(A)$ pro každou $A \in \Lambda$ a $x \in \mathbb{R}^n$;

(v) λ je regulární, tj. jestliže $A \in \Lambda$ pak pro každé $\epsilon > 0$ existují F uzavřená podmnožina A a G otevřená nadmnožina A, že $\lambda(G \setminus F) < \epsilon$.

Míra λ z předchozí věty se nazývá *Lebesgueova míra* a množinám v Λ se říká *lebesgueovsky měřitelné množiny*.

Příklad. Příklady lebesgueovsky měřitelných množin:

- otevřené a uzavřené množiny,
- konvexní množiny,
- konečné množiny,
- $\{x_k \in \mathbb{R}^n;\ k \in \mathbb{N}\}$, tj. množina všech členů nějaké posloupnosti v $\mathbb{R}^n$.

Zvláštní význam mají množiny míry nula. Podle vlastnosti (ii) z Věty 24 je každá podmnožina množiny s nulovou mírou měřitelná (a má nulovou míru).

Příklad. Příklady množin nulové míry v $\mathbb{R}^n$:

- konečné množiny,
- $\{x_k \in \mathbb{R}^n;\ k \in \mathbb{N}\}$, tj. množina všech členů nějaké posloupnosti v $\mathbb{R}^n$,
- nadroviny v $\mathbb{R}^n$,
- grafy spojitých funkcí z $\mathbb{R}^{n-1}$ do $\mathbb{R}$,
- hranice konvexních množin,
- Cantorovo diskontinuum v $\mathbb{R}$.

Je-li $V(x),\ x \in \mathbb{R}^n$ výroková forma, pak říkáme, že $V(x)$ platí pro *„skoro všechna x"* nebo *„skoro všude"*, jestliže existuje množina E nulové míry taková, že $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus E\colon V(x)$. Například Dirichletova funkce je skoro všude rovna nule.

Definice. Pro $A \subset \mathbb{R}^n$ definujeme *charakteristickou funkci* množiny A takto:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus A. \end{cases}$$

Nechť $A_1, \ldots, A_k \subset \mathbb{R}^n$ a $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$. Funkci tvaru $\sum_{j=1}^k c_j \chi_{A_j}$ nazýváme *jednoduchou funkcí*. Jsou-li navíc $A_1, \ldots, A_k \in \Lambda$, pak funkci $\sum_{j=1}^k c_j \chi_{A_j}$ nazýváme *jednoduchou měřitelnou funkcí*.

Definice. Zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ nazýváme *numerickou funkcí*. Řekneme, že numerická funkce f je *měřitelná*, jestliže existuje posloupnost jednoduchých měřitelných funkcí $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ taková, že pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ platí $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$.

Definice. Je-li $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ posloupnost numerických funkcí, řekneme že numerická funkce f je *bodovou limitou* posloupnosti $\{f_j\}$, jestliže pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$. Značíme $\lim_{j\to\infty} f_j = f$ nebo $f_j \to f$.

Věta 25 (vlastnosti měřitelných funkcí)**.** *Měřitelné funkce mají následující vlastnosti:*

(i) Jsou-li f, g měřitelné a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak i $\alpha f,\ f+g,\ fg,\ \frac{f}{g}$ jsou měřitelné, pokud jsou definované na celém $\mathbb{R}^n$.

(ii) Jsou-li f, g měřitelné, pak i $\max\{f, g\}$ a $\min\{f, g\}$ jsou měřitelné.

(iii) Je-li f reálná měřitelná a g reálná spojitá, pak $g \circ f$ je měřitelná.

(iv) Je-li $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ posloupnost měřitelných funkcí s bodovou limitou f, pak f je také měřitelná.

(v) Spojité funkce jsou měřitelné.

Definice. Pro jednoduchou nezápornou měřitelnou funkci $\sum_{j=1}^k c_j \chi_{A_j}$ definujeme její *Lebesgueův integrál* jako

$$\int \sum_{j=1}^k c_j \chi_{A_j} \,\mathrm{d}\lambda = \sum_{j=1}^k c_j \lambda(A_j),$$

kde používáme konvenci $0 \cdot (+\infty) = 0$.

Definice. Pro nezápornou měřitelnou funkci definujeme

$$\int f \,\mathrm{d}\lambda = \sup \left\{ \int g \,\mathrm{d}\lambda;\ g \le f,\ g \text{ je jednoduchá nezáporná měřitelná} \right\}.$$

Konečně pro měřitelnou funkci f definujeme

$$\int f \,\mathrm{d}\lambda = \int f^+ \,\mathrm{d}\lambda - \int f^- \,\mathrm{d}\lambda,$$

pokud je rozdíl definován.

Říkáme, že funkce f je (lebesgueovsky) *integrovatelná*, pokud má *konečný* Lebesgueův integrál.

Nezáporné měřitelné funkce mají Lebesgueův integrál. Pro obecné měřitelné funkce to nemusí být pravda.

Definice. Je-li $M \subset \mathbb{R}^n$ měřitelná množina a f měřitelná funkce, pak definujeme

$$\int_M f \, \mathrm{d}\lambda = \int \chi_M f \, \mathrm{d}\lambda.$$

Věta 26 (vlastnosti Lebesgueova integrálu)**.** *Nechť M je měřitelná množina a f, g jsou měřitelné funkce.*

(i) Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak $\int_M \alpha f \, \mathrm{d}\lambda = \alpha \int_M f \, \mathrm{d}\lambda$ a $\int_M (f+g) \, \mathrm{d}\lambda = \int_M f \, \mathrm{d}\lambda + \int_M g \, \mathrm{d}\lambda$, pokud jsou výrazy napravo definovány.

(ii) Platí-li $f \leq g$ skoro všude na M, pak $\int_M f \, \mathrm{d}\lambda \leq \int_M g \, \mathrm{d}\lambda$, pokud oba integrály existují.

(iii) Jestliže $\int_M f \, \mathrm{d}\lambda$ existuje, pak existuje i $\int_M |f| \, \mathrm{d}\lambda$ a platí $\left|\int_M f \, \mathrm{d}\lambda\right| \leq \int_M |f| \, \mathrm{d}\lambda$.

(iv) Je-li $f = 0$ skoro všude na M, pak $\int_M f \, \mathrm{d}\lambda = 0$.

(v) Je-li $f = g$ skoro všude na M, pak $\int_M f \, \mathrm{d}\lambda = \int_M g \, \mathrm{d}\lambda$, pokud alespoň jeden z integrálů existuje.

Z vlastnosti (v) plyne, že pro práci s integrálem $\int_M f \, \mathrm{d}\lambda$ stačí, aby f byla definována skoro všude na M.
Na rozdíl od Riemannova integrálu platí pro Lebesgueův i obrácení (iii): $\int f \, \mathrm{d}\lambda$ existuje, právě když existuje $\int |f| \, \mathrm{d}\lambda$.

Věta 27 (souvislost s Riemannovým integrálem)**.**

(i) Jestliže existuje Riemannův integrál $\int_a^b f$, pak existuje i Lebesgueův integrál $\int_{(a,b)} f \, \mathrm{d}\lambda$ a oba integrály se rovnají.

(ii) Je-li f omezená na $\langle a, b \rangle$, pak její Riemannův integrál existuje, právě když je skoro všude spojitá.

(iii) Je-li f spojitá nezáporná funkce na (a, b), pak $\int_{(a,b)} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_a^b f$, kde vpravo je zobecněný Riemannův integrál.

Příklad. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je omezená otevřená nebo uzavřená množina a f je omezená spojitá funkce na M. Pak f je integrovatelná na M.

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je omezená konvexní otevřená množina a f je spojitá funkce na $\overline{M}$. Pak f je integrovatelná na M i na $\overline{M}$ a platí $\int_M f \, \mathrm{d}\lambda = \int_{\overline{M}} f \, \mathrm{d}\lambda$.

Věta 28 (Fubiniova)**.** *Nechť $m, n \in \mathbb{N}$ a $f\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ je integrovatelná funkce. Pro každé $x \in \mathbb{R}^m$ definujme funkci $f_x\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ předpisem $f_x(y) = f(x, y)$. Pak pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^m$ je funkce f_x integrovatelná a platí*

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_x(y) \, \mathrm{d}\lambda(y) \right) \mathrm{d}\lambda(x). \tag{1}$$

Poznámka. Nechť $m, n \in \mathbb{N}$ a $f\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^*$ je *nezáporná* měřitelná funkce. Pro každé $x \in \mathbb{R}^m$ definujme funkci $f_x\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ předpisem $f_x(y) = f(x, y)$. Pak pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^m$ je funkce f_x měřitelná a platí opět vzorec (1). Zde ovšem může být integrál $\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f \, \mathrm{d}\lambda$ nekonečný.

Věta 29 (o substituci)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, funkce $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C^1(G)$ a zobrazení $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ definované předpisem $\varphi(x) = [\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)]$ nechť je prosté. Dále předpokládejme, že determinant (tzv. jakobián)*

$$J_\varphi(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(x) \end{vmatrix}$$

je nenulový v každém bodě $x \in G$. Pak $\varphi(G)$ je otevřená a pro každou měřitelnou $M \subset \varphi(G)$ a každou $f\colon G \to \mathbb{R}^*$ platí

$$\int_M f \, \mathrm{d}\lambda = \int_{\varphi^{-1}(M)} f\big(\varphi(x)\big) \, |J_\varphi(x)| \, \mathrm{d}\lambda(x),$$

pokud je alespoň jeden z těchto integrálů definován.

IX. Lineární algebra

IX.1. Vektorové prostory

Symbol $\mathbb{K}$ značí množinu $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

Definice. *Vektorovým prostorem nad* $\mathbb{K}$ rozumíme trojici $(V, +, \cdot)$, kde V je neprázdná množina, $+$ je operace z $V \times V$ do V a $\cdot$ je operace z $\mathbb{K} \times V$ do V, přičemž tyto operace mají následující vlastnosti:

- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V\colon \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (komutativita sčítání),
- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V\colon (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ (asociativita sčítání),
- množina V obsahuje prvek, který značíme $\boldsymbol{o}$ (a říkáme mu *nulový prvek*), splňující
$$\forall \boldsymbol{v} \in V\colon \boldsymbol{o} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}.$$
- $\forall \boldsymbol{v} \in V\ \exists \boldsymbol{w} \in V\colon \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}$,
- $\forall a, b \in \mathbb{K}\ \forall \boldsymbol{v} \in V\colon a \cdot (b \cdot \boldsymbol{v}) = (ab) \cdot \boldsymbol{v}$,
- $\forall a, b \in \mathbb{K}\ \forall \boldsymbol{v} \in V\colon (a + b) \cdot \boldsymbol{v} = a \cdot \boldsymbol{v} + b \cdot \boldsymbol{v}$,
- $\forall a \in \mathbb{K}\ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V\colon a \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a \cdot \boldsymbol{u} + a \cdot \boldsymbol{v}$,
- $\forall \boldsymbol{v} \in V\colon 1 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$.

Definice. Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $U \subset V$, $U \neq \emptyset$. Řekneme, že U je *vektorový podprostor* prostoru V, jestliže

- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U\colon \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$,
- $\forall a \in \mathbb{K}\ \forall \boldsymbol{u} \in U\colon a \cdot \boldsymbol{u} \in U$.

Definice. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $k \in \mathbb{N}$ a $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \in V$. Řekneme, že vektor $\boldsymbol{u} \in V$ *je lineární kombinací vektorů* $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ *s koeficienty* $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, jestliže

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k.$$

V tomto případě také říkáme, že lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ s koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ je rovna $\boldsymbol{u}$.

Pokud $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$, pak mluvíme o *triviální lineární kombinaci* vektorů $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$; je-li některý koeficient nenulový, pak mluvíme o *netriviální lineární kombinaci*.

Definice. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m$ jsou pevně zvolené vektory z V. Podprostor $\operatorname{lin}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m\}$ nazýváme *vektorovým podprostorem generovaným vektory* $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m$. Z formálních důvodů dále klademe $\operatorname{lin}_{\mathbb{K}} \emptyset = \{\boldsymbol{o}\}$.

Definice. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m \in V$ jsou *lineárně závislé*, pokud existuje jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru. Pokud vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m$ nejsou lineárně závislé, říkáme, že jsou *lineárně nezávislé*.

Definice. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. *Množina* $M \subset V$ je *lineárně nezávislá*, jestliže pro každé $k \in \mathbb{N}$ je libovolná k-tice po dvou různých vektorů z M lineárně nezávislá.

Definice. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Říkáme, že množina $B \subset V$ je *báze* prostoru V, jestliže

(i) B je lineárně nezávislá množina,

(ii) každý vektor z V lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z B.

Věta 30.

(i) Každou lineárně nezávislou podmnožinu vektorového prostoru lze doplnit na bázi tohoto prostoru.

(ii) Každý vektorový prostor má bázi.

(iii) Počet prvků báze prostoru V je určen jednoznačně a nazýváme ho dimenze prostoru V (značíme $\dim V$*).*

Definice. Je-li $\dim V < +\infty$, řekneme, že V je *konečněrozměrný (konečnědimenzionální)*. Je-li $\dim V = +\infty$, mluvíme o *nekonečněrozměrném (nekonečnědimenzionálním)* vektorovém prostoru.

Tvrzení 31. *Nechť* V *je vektorový prostor dimenze* $n \in \mathbb{N}$ *nad* $\mathbb{K}$.

(i) Jsou-li $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ *lineárně nezávislé vektory v prostoru* V*, pak množina* $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ *je bází prostoru* V.

(ii) Jestliže pro vektory $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \in V$ *platí* $\operatorname{lin}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\} = V$*, je množina* $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ *bází prostoru* V.

IX.2. Lineární zobrazení a řešení soustav lineárních rovnic

Definice. Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$. Zobrazení $L\colon U \to V$ se nazývá *lineární*, jestliže platí:

- $\forall \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U\colon L(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = L(\boldsymbol{u}_1) + L(\boldsymbol{u}_2)$,
- $\forall a \in \mathbb{K}\ \forall \boldsymbol{u} \in U\colon L(a\boldsymbol{u}) = aL(\boldsymbol{u})$.

Definice. Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$, $L\colon U \to V$ nechť je lineární zobrazení. *Jádrem* lineárního zobrazení L nazveme množinu

$$\operatorname{Ker}(L) = L^{-1}(\{\boldsymbol{o}\}) = \{\boldsymbol{u} \in U\colon L(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}\}.$$

Symbolem $\operatorname{Im}(L)$ značíme obor hodnot zobrazení L, tedy

$$\operatorname{Im} L = L(U) = \{\boldsymbol{v} \in V;\ \exists \boldsymbol{u} \in U\colon L(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}\}.$$

Věta 32. *Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$, $L\colon U \to V$ nechť je lineární zobrazení. Potom platí:*

(i) Množina $\operatorname{Ker}(L)$ *je vektorovým podprostorem* U*.*

(ii) Množina $\operatorname{Im}(L)$ *je vektorovým podprostorem* V*.*

(iii) Platí $\dim \operatorname{Ker}(L) + \dim \operatorname{Im}(L) = \dim U$*.*

Nechť U, V jsou vektorové prostory, $L\colon U \to V$ je lineární zobrazení a $\boldsymbol{b} \in V$. Uvažujme rovnici

$$L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}. \tag{2}$$

Věta 33. *Nechť $\boldsymbol{x}_0 \in U$ je řešením rovnice* (2)*. Potom množina*

$$\{\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{w}\colon \boldsymbol{w} \in \operatorname{Ker}(L)\}$$

je množinou všech řešení rovnice (2)*.*

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(m \times n)$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Uvažujme soustavu m rovnic o n neznámých

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}. \tag{3}$$

Důsledek 34. *Má-li soustava* (3) *řešení $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, pak množina všech řešení má tvar*

$$\{\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{w}\colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}\}.$$

IX.3. Kvadratické formy

Definice. Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$. Platí-li $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$, pak říkáme, že matice $\boldsymbol{A}$ je *symetrická*.

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ je symetrická matice. Pak funkci $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definované předpisem $\varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$ říkáme *kvadratická forma*. Říkáme, že tato forma je *reprezentována maticí* $\boldsymbol{A}$ nebo že matice $\boldsymbol{A}$ je *reprezentující maticí* formy φ.

Poznámka. Je-li $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratická forma, pak pro každé $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}$ platí $\varphi(c\boldsymbol{u}) = c^2\varphi(\boldsymbol{u})$. To plyne z definice maticového násobení.

Definice. Nechť $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je kvadratická forma. Řekneme, že φ je

- *pozitivně definitní* (PD), jestliže $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}\colon \varphi(\boldsymbol{u}) > 0$,
- *negativně definitní* (ND), jestliže $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}\colon \varphi(\boldsymbol{u}) < 0$,
- *pozitivně semidefinitní* (PSD), jestliže $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n\colon \varphi(\boldsymbol{u}) \geq 0$,
- *negativně semidefinitní* (NSD), jestliže $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n\colon \varphi(\boldsymbol{u}) \leq 0$,
- *indefinitní* (ID), neplatí-li nic z předchozího, tj. $\exists \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n\colon \varphi(\boldsymbol{u}) > 0 \wedge \varphi(\boldsymbol{v}) < 0$.

Definice. Řekneme, že matice $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M(n \times n)$ je *diagonální*, jestliže $a_{ij} = 0$ pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$.

Tvrzení 35. *Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M(n \times n)$ je diagonální. Pak platí:*

- *$\boldsymbol{A}$ je pozitivně definitní, právě když $a_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, n$;*
- *$\boldsymbol{A}$ je negativně definitní, právě když $a_{ii} < 0$, $i = 1, \dots, n$;*

- $\boldsymbol{A}$ *je pozitivně semidefinitní, právě když* $a_{ii} \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$;

- $\boldsymbol{A}$ *je negativně semidefinitní, právě když* $a_{ii} \leq 0$, $i = 1, \ldots, n$;

- $\boldsymbol{A}$ *je indefinitní, právě když existují taková* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, *že* $a_{ii} > 0$ *a* $a_{jj} < 0$.

Definice. *Symetrickou elementární úpravou* matice $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ budeme rozumět úpravu, kdy provedeme jistou elementární řádkovou úpravu matice $\boldsymbol{A}$ a vzniklou matici upravíme odpovídající sloupcovou úpravou.

Symetrickou transformací matice $\boldsymbol{A}$ budeme rozumět konečnou posloupnost symetrických elementárních úprav.

Lemma 36. *Nechť* T *je transformace matic o* m *řádcích. Potom existuje regulární matice* $\boldsymbol{B} \in M(m \times m)$ *taková, že kdykoli* $\boldsymbol{A}' \in M(m \times n)$ *vznikne z* $\boldsymbol{A} \in M(m \times n)$ *pomocí* T, *tak platí* $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$.

Obráceně, je-li $\boldsymbol{B} \in M(m \times m)$ *regulární matice, pak existuje transformace* T *matic o* m *řádcích taková, že pro každou matici* $\boldsymbol{A} \in M(m \times n)$ *platí* $\boldsymbol{A} \overset{T}{\rightsquigarrow} \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$.

Věta 37. *Uvažujme symetrickou transformaci* T *matic typu* $n \times n$. *Potom existuje regulární matice* $\boldsymbol{B} \in M(n \times n)$ *taková, že kdykoli matice* $\boldsymbol{A}' \in M(n \times n)$ *vznikne z* $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ *pomocí* T, *tak platí* $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T$.

Lemma 38.

(i) Je-li $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ *symetrická matice a* $\boldsymbol{C} \in M(n \times n)$, *pak* $\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^T$ *je opět symetrická matice.*

(ii) Symetrická transformace zachovává symetrii matice.

Lemma 39. *Nechť* $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ *je symetrická matice a* $\boldsymbol{Q} \in M(n \times n)$ *je regulární matice. Je-li* $\boldsymbol{A}$ *pozitivně definitní (resp. negativně definitní, pozitivně semidefinitní, negativně semidefinitní, indefinitní), pak je matice* $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^T$ *pozitivně definitní (resp. negativně definitní, ...).*

Věta 40. *Nechť* $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ *je symetrická matice a nechť* $\boldsymbol{B} \in M(n \times n)$ *vznikne z* $\boldsymbol{A}$ *pomocí symetrické transformace. Matice* $\boldsymbol{A}$ *je pozitivně definitní (resp. negativně definitní, pozitivně semidefinitní, negativně semidefinitní, indefinitní), právě když* $\boldsymbol{B}$ *je pozitivně definitní (resp. negativně definitní, ...).*

Věta 41. *Nechť* $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ *je symetrická matice. Pak ji lze symetrickou transformací převést na diagonální matici.*

Poznámka. Má-li symetrická matice $\boldsymbol{C} = (c_{ij}) \in M(n \times n)$ na diagonále kladný prvek c_{ii} a záporný prvek c_{jj}, pak je již indefinitní.

Věta 42 (Sylvestrovo kritérium). *Nechť* $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M(n \times n)$ *je symetrická matice. Pak* $\boldsymbol{A}$ *je*

- *pozitivně definitní, právě když*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \quad \textit{pro každé } k = 1, \ldots, n,$$

- *negativně definitní, právě když*

$$(-1)^k \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \quad \textit{pro každé } k = 1, \ldots, n,$$

- *pozitivně semidefinitní, právě když pro každou* k*-tici přirozených čísel* $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, $k = 1, \ldots, n$, *platí*

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \dots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k i_1} & \dots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix} \geq 0,$$

- *negativně semidefinitní, právě když pro každou* k*-tici přirozených čísel* $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, $k = 1, \ldots, n$, *platí*

$$(-1)^k \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \dots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k i_1} & \dots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix} \geq 0.$$

IX.4. Vlastní čísla a vektory

Definice. Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$. Řekneme, že $\lambda \in \mathbb{C}$ je *vlastní číslo* matice $\boldsymbol{A}$, jestliže existuje nenulový vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ takový, že $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$. Vektor $\boldsymbol{x}$ pak nazýváme *vlastním vektorem* matice $\boldsymbol{A}$ příslušným k vlastnímu číslu λ.

Věta 43. *Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$.*

(i) Prvek $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem matice $\boldsymbol{A}$, právě když $\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$.

(ii) Funkce $\lambda \mapsto \det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ je polynom n-tého stupně s koeficientem u n-té mocniny rovným jedné.

(iii) Matice $\boldsymbol{A}$ má nejvýše n různých vlastních čísel.

Definice. Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$. Polynom $\lambda \mapsto \det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ se nazývá *charakteristický polynom* matice $\boldsymbol{A}$. Vzhledem k tvrzení (i) předchozí věty definujeme *násobnost vlastního čísla matice* jako násobnost tohoto čísla jakožto kořene charakteristického polynomu.

Věta 44. *Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ je symetrická matice. Pak jsou všechna její vlastní čísla reálná.*

Definice. Řekneme, že matice $\boldsymbol{Q} \in M(n \times n)$ je *ortogonální*, jestliže platí $\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{I}$.

Věta 45 (spektrální rozklad matice)**.** *Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ je symetrická matice. Pak existuje ortogonální matice $\boldsymbol{Q} \in M(n \times n)$ taková, že*

$$\boldsymbol{QAQ}^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$.

Věta 46. *Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ je symetrická matice. Pak platí:*

- *$\boldsymbol{A}$ je pozitivně definitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla kladná,*
- *$\boldsymbol{A}$ je negativně definitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla záporná,*
- *$\boldsymbol{A}$ je pozitivně semidefinitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla nezáporná,*
- *$\boldsymbol{A}$ je negativně semidefinitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla nekladná,*
- *$\boldsymbol{A}$ je indefinitní, právě když má kladné vlastní číslo i záporné vlastní číslo.*

Definice. Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M(n \times n)$. *Stopou* matice $\boldsymbol{A}$ rozumíme číslo

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Věta 47. *Nechť $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M(n \times n)$, $a \in \mathbb{R}$. Pak platí:*

(i) $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{tr}(\boldsymbol{B})$,

(ii) $\operatorname{tr}(a\boldsymbol{A}) = a \operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$,

(iii) $\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{BA})$,

(iv) $\operatorname{tr}(\boldsymbol{ABC}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{CAB}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{BCA})$.

Důležitým příkladem lineárních zobrazení jsou *projekce*, což jsou lineární zobrazení $P\colon V \to V$ vektorového prostoru V do sebe, pro která platí $P \circ P = P$. Projekce je zobrazení na podprostor $\operatorname{Im}(P)$ a pro každý vektor $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Im}(P)$ platí $P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.

Reprezentující matice projekcí na $\mathbb{R}^n$ splňují vztah $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$. Takovým maticím říkáme *idempotentní*.

Tvrzení 48. *Symetrická idempotentní matice je pozitivně semidefinitní.*

Tvrzení 49. *Vlastní čísla idempotentní matice jsou rovna 0 nebo 1.*

Věta 50. *Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ je idempotentní. Pak existuje regulární matice $\boldsymbol{Q} \in M(n \times n)$ taková, že $\boldsymbol{QAQ}^{-1} = \boldsymbol{D}$, kde matice $\boldsymbol{D}$ je diagonální a na diagonále má jen prvky 0 a 1.*

Věta 51. *Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ je idempotentní. Pak $h(\boldsymbol{A}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$.*

Důsledek 52. *Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ je idempotentní. Pak $h(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = n - h(\boldsymbol{A})$.*

IX.5. Skalární součin

Definice. *Skalárním součinem* vektorů $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ rozumíme číslo

$$<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}> = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Definice. Řekneme, že vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ jsou na sebe *kolmé*, jestliže $<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}> = 0$.

Věta 53 (vlastnosti skalárního součinu)**.** *Platí:*

(i) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \colon <\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}> = <\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}> + <\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}>$*,*

(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \colon <\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}> = \alpha<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}>$*,*

(iii) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \colon <\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}> = <\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}>$*,*

(iv) zobrazení $\boldsymbol{x} \mapsto <\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}>$ *z* $\mathbb{R}^n$ *do* $\mathbb{R}$ *je pozitivně definitní kvadratická forma.*

Definice. *Normou* vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ rozumíme číslo

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Věta 54 (vlastnosti normy)**.** *Nechť* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$*,* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Pak platí*

(i) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$*,*

(ii) $\|\boldsymbol{x}\| = 0$*, právě když* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$*,*

(iii) $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$*,*

(iv) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ *(trojúhelníková nerovnost),*

(v) $|<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}>| \leq \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|$ *(Cauchyova nerovnost).*

Věta 55 (Pythagorova věta)**.** *Vektory* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ *jsou na sebe kolmé, právě když* $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2$.

X. Taylorův polynom

X.1. Taylorův polynom funkce jedné reálné proměnné

Definice. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a funkce f má v bodě a vlastní n-tou derivaci. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme *Taylorovým polynomem funkce f v bodě a řádu n.*

Poznámka. Označíme-li $T = T_n^{f,a}$, pak platí $T^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ pro $k = 0, 1, \dots, n$.

Lemma 56. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, Q je polynom,* st $Q \leq n$ *a* $\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$. *Pak Q je nulový polynom.*

Věta 57 (Peanův tvar zbytku)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a funkce f má v bodě a vlastní n-tou derivaci. Potom*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Věta 58 (o jednoznačnosti)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, funkce f má v bodě a vlastní n-tou derivaci a P je polynom stupně nejvýše n splňující*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Potom $P = T_n^{f,a}$.

Definice. Nechť f a g jsou funkce, $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f je *v bodě a malé o od g* (píšeme $f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$), jestliže platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Věta 59 (aritmetika malého o)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.*

(i) Jestliže $f_1(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ a $f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$, potom $f_1(x) + f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$.

(ii) Jestliže $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a $f_2(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$, potom $f_1(x)f_2(x) = o\big(g_1(x)g_2(x)\big)$, $x \to a$.

(iii) Jestliže $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a f_2 je nenulová na jistém prstencovém okolí bodu a, potom $f_1(x)f_2(x) = o\big(g_1(x)f_2(x)\big)$, $x \to a$.

(iv) Jestliže $f(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a existuje vlastní $\lim_{x\to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$, *potom $f(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$.*

(v) Jestliže $f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ a h je omezená na jistém prstencovém okolí bodu a, potom $h(x)f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$.

(vi) Jestliže $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \leq n$, a $f(x) = o\big((x-a)^n\big)$, $x \to a$, potom $f(x) = o\big((x-a)^m\big)$, $x \to a$.

Věta 60. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $f(y) = o\big(g(y)\big)$, $y \to b$, $\lim_{x\to a} \varphi(x) = b$ a existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že*

$$\forall x \in P(a,\delta)\colon \varphi(x) \neq b.$$

Potom $f\big(\varphi(x)\big) = o\big(g(\varphi(x))\big)$, $x \to a$.

Věta 61 (Lagrangeův tvar zbytku)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, a dále nechť I je otevřený interval, $f \in C^{n+1}(I)$ a $a \in I$. Potom pro každé $x \in I$ existuje číslo $\xi \in \langle a, x\rangle$ splňující*

$$f(x) = T_n^{f,a}(x) + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

Definice. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a funkce f má v bodě a derivace všech řádů. Potom řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme *Taylorovou řadou funkce f o středu a*. Ve speciálním případě $a = 0$ mluvíme o *MacLaurinově řadě*.

X.2. Taylorovy polynomy a řady elementárních funkcí

Tvrzení 62. *Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí:*

- $T_k^{\exp,0} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k$,
- $T_{2k-1}^{\sin,0} = T_{2k}^{\sin,0} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1}$,
- $T_{2k}^{\cos,0} = T_{2k+1}^{\cos,0} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k}$,
- $T_k^{\log(1+x),0} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k$,
- $T_k^{(1+x)^\alpha,0} = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^k$, *kde* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\binom{\alpha}{0} = 1$, $\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}$.

Věta 63. *Pro každé $x \in \mathbb{R}$ jsou funkce* exp, sin *a* cos *součtem své Taylorovy řady o středu* 0. *Platí tedy:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n,$$
$$\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1},$$
$$\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}.$$

Věta 64. *Platí*

$$\forall x \in (-1,1\rangle\colon\ \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,$$
$$\forall x \in (-1,1)\colon\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n}x^n.$$

X.3. Taylorův polynom 2. řádu funkce více proměnných

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\boldsymbol{a} \in G$ a $f \in C^2(G)$. Definujme funkci $T_2^{f,\boldsymbol{a}}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ předpisem

$$T_2^{f,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})(x_i - a_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j).$$

Tuto funkci nazýváme *Taylorovým polynomem druhého řádu funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$*.

Označme symbolem $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ matici druhých parciálních derivací funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ (tzv. *Hessovu matici*), tj.

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a})\right)_{i,j=1..n}.$$

Pak můžeme psát

$$T_2^{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^T \nabla^2 f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}).$$

Věta 65. *Nechť $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $\Delta > 0$ a $f \in C^2\big(B(\boldsymbol{a},\Delta)\big)$. Potom existuje funkce $\omega\colon B(\boldsymbol{a},\Delta) \to \mathbb{R}$ taková, že*

$$\forall \boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a},\Delta)\colon\ f(\boldsymbol{x}) = T_2^{f,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) + \omega(\boldsymbol{x}) \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|^2$$

a platí

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \omega(\boldsymbol{x}) = 0.$$

XI. Extrémy funkcí více proměnných

XI.1. Podmínky druhého řádu

Definice. Nechť f je funkce n proměnných. Je-li bod $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ stacionárním bodem funkce f a f nenabývá v $\boldsymbol{a}$ extrému, tj.

$$\forall \delta > 0\ \exists \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{a}, \delta)\colon f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{a}) \text{ a } f(\boldsymbol{y}) < f(\boldsymbol{a}),$$

pak bod $\boldsymbol{a}$ nazýváme *sedlovým bodem* funkce f.

Věta 66 (nutné podmínky druhého řádu)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná otevřená množina, $f \in C^2(G)$ a $\boldsymbol{a} \in G$. Potom platí:*

(i) Je-li $\boldsymbol{a}$ bodem lokálního maxima funkce f, je matice $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ negativně semidefinitní.

(ii) Je-li $\boldsymbol{a}$ bodem lokálního minima funkce f, je matice $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ pozitivně semidefinitní.

Věta 67 (postačující podmínky druhého řádu)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná otevřená množina, $f \in C^2(G)$ a nechť $\boldsymbol{a} \in G$ je stacionárním bodem funkce f. Potom platí:*

(i) Je-li $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ negativně definitní, nabývá f v bodě $\boldsymbol{a}$ ostrého lokálního maxima.

(ii) Je-li $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ pozitivně definitní, nabývá f v bodě $\boldsymbol{a}$ ostrého lokálního minima.

(iii) Je-li $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ indefinitní, nenabývá f v bodě $\boldsymbol{a}$ ani lokálního maxima, ani lokálního minima, tj. $\boldsymbol{a}$ je sedlový bod funkce f.

Lemma 68. *Kvadratická forma $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je pozitivně definitní (resp. negativně definitní), právě když existuje $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, takové, že pro všechna $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ platí*

$$\varphi(\boldsymbol{u}) \geq \alpha \left\|\boldsymbol{u}\right\|^2 \qquad \textit{(resp. } \varphi(\boldsymbol{u}) \leq -\alpha \left\|\boldsymbol{u}\right\|^2\textit{).}$$

XI.2. Extrémy konkávních funkcí

Věta 69. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná otevřená konvexní množina a $f \in C^2(G)$. Funkce f je na množině G konkávní, právě když pro každé $\boldsymbol{x} \in G$ je matice $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ negativně semidefinitní.*

Věta 70. *Nechť G je otevřená konvexní podmnožina $\mathbb{R}^n$, $f \in C^2(G)$ a $\boldsymbol{a} \in G$. Nechť platí*

(i) $\forall \boldsymbol{x} \in G\colon \nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ je negativně semidefinitní,

(ii) $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$.

Potom funkce f nabývá v bodě $\boldsymbol{a}$ svého maxima na množině G.