

3. cvičení - infimum a supremum

20. 10. 2022

∞ = příklady, co byste fakt fakt měli udělat, prosím prosím

Příklad 1. Určete infima a suprema následujících množin. Rozhodněte o (ne)existenci jejich maxim a minim.

a. $A = \{5, 6\}$

e. $E = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$

b. $B = [-2, 5)$

f. $F = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$

c. $C = (-2, 0] \cup \{1\} \cup ((2, 4] \cap (3, 4))$

d. $\infty D = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 \leq 2\}$

g. $\infty G = \{x \in \mathbb{R} : x \sin x < 1\}$

Příklad 2. Určete infima a suprema následujících množin. Rozhodněte o (ne)existenci jejich maxim a minim.

a. $\infty A = \{\frac{p}{p+q} : p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}\}$

f. $\infty F = \{n^2 - m^2 : n, m \in \mathbb{N}, n > m\}$

b. $B = \{\sin x : x \in [0, 2\pi]\}$

g. $G = \{n^2 - m^2 : n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$

c. $C = \{\sin x : x \in (0, 2\pi)\}$

h. $H = \{2^{-n} + 3^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$

d. $D = \{\sin x : x \in (0, \pi)\}$

i. $\infty I = \{2^{-n} + 3^{-n} : n \in \mathbb{Z}\}$

e. $E = \{n^2 - m^2 : n, m \in \mathbb{N}\}$

j. $J = \{5^{(-1)^m \cdot 3^n} : m, n \in \mathbb{Z}\}$

Příklad 3. Necht' $A, B \subset \mathbb{R}$. Co ummíme říct o supremu a infimu následujících množin ve vztahu k $\sup A$, $\sup B$, $\inf A$ a $\inf B$

a. $A \cup B$

e. $-A = \{-a, a \in A\}$

b. $A \cap B$

f. $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$

c. $A \setminus B$

g. $\infty A - B = \{a - b, a \in A, b \in B\}$

d. $A \Delta B$

h. $A \cdot B = \{a \cdot b, a \in A, b \in B\}$

Příklad 4. Určete infima a suprema následujících množin. Rozhodněte o (ne)existenci jejich maxim a minim.

a. $A = \{x \in \mathbb{R} : x^4 < 16\}$

e. $E = \{1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} : n \in \mathbb{N}\}$

b. $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x \leq 1\}$

f. $\infty F = \{\cos((n + \frac{1}{n})\pi) : n \in \mathbb{N}\}$

c. $C = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x-1} > 2\}$

g. $G = \{\cos((2n + \frac{1}{2n})\pi) : n \in \mathbb{N}\}$

d. $\infty D = \{(-1)^n + \frac{1}{1+n} : n \in \mathbb{N}\}$

h. $H = \{\cos((2n - 1 + \frac{1}{2n-1})\pi) : n \in \mathbb{N}\}$

Příklad 5. Buď $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ omezená množina a $B := \{|x - y| : x, y \in A\}$. Dokažte následující tvrzení.

- a. Množina B má supremum i infimum.
- b. Platí $\sup B = \sup A - \inf A$.
- c. Máme $\inf B = 0$.