

10. cvičení - řešení

15. 12. 2022

Příklad 1 (a) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na jednotlivé sčítance použijeme vzorec pro $(c \cdot x^\alpha)' = c\alpha \cdot x^{\alpha-1}$. Funkce je definována na $[0, \infty)$, neboť potřebujeme nezáporné číslo pod sudou omocninou. Derivace funkce je definována na $(0, \infty)$, neboť potřebujeme kladné číslo pod sudou omocninou ve jmenovateli.

Příklad 1 (b)

$$((x^2-2x+3)e^x)' = ((x^2-2x+3))' \cdot e^x + (x^2-2x+3) \cdot (e^x)' = (2x-2)e^x + (x^2-2x+3)e^x = (x^2+3)e^x.$$

Funkce i derivace funkce jsou definovány na $\mathbb{R}$.

Příklad 1 (c) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na jednotlivé sčítance použijeme vzorec pro $(c \cdot x^\alpha)' = c\alpha \cdot x^{\alpha-1}$. Funkce je definována na $[0, \infty)$, neboť potřebujeme nezáporné číslo pod sudou omocninou. Derivace funkce je definována na $(0, \infty)$, neboť potřebujeme kladné číslo pod sudou omocninou ve jmenovateli.

Příklad 1 (d)

$$\begin{aligned} (x \log x + x \log_3 x + 2e^x)' &= x' \log x + x(\log x)' + x' \log_3 x + x(\log_3 x)' + (2e^x)' = \\ &= \log x + x \cdot \frac{1}{x} + \log_3 x + x \cdot \left(\frac{\log x}{\log 3}\right)' + 2e^x = \log x + 1 + \log_3 x + \frac{1}{\log 3} + 2e^x \end{aligned}$$

Funkce je definována na $(0, \infty)$, neboť potřebujeme kladné číslo uvnitř logaritmu. Derivace funkce je definována na $(0, \infty)$ ze stejného důvodu.

Příklad 1 (e) $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)' = (e^{x \cdot \log \frac{3}{2}})' = \log \frac{3}{2} \cdot e^{x \cdot \log \frac{3}{2}} = \log \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x$, nebo lze alternativně použít vzorec $(c \cdot a^x)' = c \log a \cdot a^x$. Funkce i derivace funkce jsou definovány na $\mathbb{R}$, neboť mocněný výraz je kladný.

Příklad 1 (f) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na jednotlivé sčítance použijeme vzorec pro $(c \cdot x^\alpha)' = c\alpha \cdot x^{\alpha-1}$. Funkce i derivace jsou definovány na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, neboť potřebujeme nenulové číslo ve jmenovateli.

Příklad 1 (g)

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2-2x+7}{x^2+5x-6}\right)' &= \frac{(x^2-2x+7)' \cdot (x^2+5x-6) - (x^2-2x+7) \cdot (x^2+5x-6)'}{(x^2+5x-6)^2} = \\ &= \frac{(2x-2) \cdot (x^2+5x-6) - (x^2-2x+7) \cdot (2x+5)}{(x^2+5x-6)^2} = \\ &= \frac{2x^3+8x^2-22x+12 - (2x^3+x^2+4x+35)}{(x^2+5x-6)^2} = \\ &= \frac{7x^2-26x-23}{(x^2+5x-6)^2}, \end{aligned}$$

kde jsme využili vzorce pro derivaci podílu. Funkce i derivace funkce jsou definovány na $\mathbb{R} \setminus \{-6, 1\}$ kvůli nenulovosti jmenovatele.

Příklad 1 (h) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na sčítance použijeme vzorec $(c \cdot \log x)' = c \cdot \frac{1}{x}$ a $(c \cdot \cos x)' = c \cdot (-\sin x)$. Funkce je definována na $(0, \infty)$, neboť potřebujeme kladná číslo uvnitř logaritmu. Derivace je pak také definována na $(0, \infty)$.

Příklad 1 (i)

$$\begin{aligned} \left(\frac{x \cos x - 2}{\log x} \right)' &= \frac{(x \cos x - 2)' \cdot (\log x) - (x \cos x - 2) \cdot (\log x)'}{(\log x)^2} = \\ &= \frac{(\cos x - x \sin x) \cdot (\log x) - (x \cos x - 2) \cdot \frac{1}{x}}{(\log x)^2} = \frac{x(\cos x - x \sin x) \cdot (\log x) - x \cos x + 2}{x(\log x)^2}, \end{aligned}$$

kde jsme využili vzorce pro derivaci podílu. Funkce i derivace funkce jsou definovány na $(0, \infty) \setminus \{0\}$ kvůli definičnímu oboru logaritmu a požadavku na nenulovost jmenovatele.

Příklad 1 (j) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na sčítance použijeme vzorec $(c \cdot \tan x)' = c \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$ a $(c \cdot \sin x)' = c \cdot \cos x$. Funkce je definována na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, neboť to je omezení plynoucí z definičního oboru funkce tangens. Derivace je pak také definována na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Příklad 1 (k) $(\sin x \cos x - \tan x)' = (\sin x)' \cos x + \sin x (\cos x)' - (\tan x)' = \cos^2 x - \sin^2 x - \frac{1}{\cos^2 x}$. Funkce je definována na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, neboť to je omezení plynoucí z definičního oboru funkce tangens. Derivace je pak také definována na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Příklad 1 (l) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na sčítance použijeme vzorec $(c \cdot \arcsin x)' = c \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ a $(c \cdot \operatorname{arccot} x)' = c \cdot \frac{-1}{1+x^2}$. Funkce je definována na $[-1, 1]$, neboť to je omezení plynoucí z definičního oboru funkce arcussinus. Derivace je pak definována na $(-1, 1)$, neboť ještě navíc požadujeme nenulovost jmenovatele.

Příklad 1 (m) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na sčítance použijeme vzorec $(c \cdot \arccos x)' = c \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ a $(c \cdot \operatorname{arccot} x)' = c \cdot \frac{1}{1+x^2}$. Funkce je definována na $[-1, 1]$, neboť to je omezení plynoucí z definičního oboru funkce arcuscosinus. Derivace je pak definována na $(-1, 1)$, neboť ještě navíc požadujeme nenulovost jmenovatele.

Příklad 2 (a) Nahlédneme, že $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Spočítáme za věty o derivaci složené funkce

$$((x^2 + 50x + 12)^{78})' = 78(x^2 + 50x + 12)^{77}(x^2 + 50x + 12)' = 78(x^2 + 50x + 12)^{77}(2x + 50).$$

Odtud vidíme, že i $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$

Příklad 2 (b) Vidíme, že $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{7\}$. Použijeme vzorce pro derivaci součinu tří funkcí $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$. Počítejme

$$\begin{aligned} (x^3(x+2)^8(x-7)^{-11})' &= 3x^2 \cdot (x+2)^8(x-7)^{-11} + x^3 \cdot 8(x+2)^7 \cdot (x-7)^{-11} + \\ &+ x^3(x+2)^8 \cdot (-11)(x-7)^{-12} = -\frac{3x^2(x+2)^7(31x+14)}{(x-7)^{-12}}. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{7\}$.

Příklad 2 (c) Je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Spočítáme

$$(\operatorname{arccotan}(2x))' = \frac{1}{1+(2x)^2}(2x)' = \frac{2}{1+4x^2}$$

a vidíme, že $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

Příklad 2 (d) Je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Spočítáme dle pravidla pro derivaci součinu

$$\left(\frac{3x-2}{x^2+1}\right)' = \frac{3 \cdot (x^2+1) - (3x-2) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2+4x+3}{(x^2+1)^2}$$

Příklad 2 (e) Spočítáme, že $x^2+x+2 > 0$ na $\mathbb{R}$, a tudíž $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Spočítáme derivaci

$$(\log(x^2+x+2))' = \frac{1}{x^2+x+2} \cdot (x^2+x+2)' = \frac{2x+1}{x^2+x+2}.$$

Z toho je vidno, že i $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

Příklad 2 (f) Je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Spočítáme derivaci

$$(\cos(x^3-x+2)^9)' = -\sin(x^3-x+2)^9 \cdot ((x^3-x+2)^9)' = -\sin(x^3-x+2)^9 \cdot 9(x^3-x+2)^8 \cdot (3x^2-1).$$

Odtud $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

Příklad 2 (g) Chceme, aby výraz v odmocnině byl kladný. Odtud dostáváme $\mathcal{D}_f = [-2, 2]$. Spočítáme derivaci

$$\left(\sqrt{4-x^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \cdot (4-x^2)' = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Odtud $\mathcal{D}_{f'} = (-2, 2)$.

Příklad 2 (h)

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$$

Definiční obor f

$$9-x^2 > 0 \iff (3-x)(3+x) > 0 \iff x \in (-3, 3) = D(f)$$

Derivace f

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\right)' = \frac{x' \cdot \sqrt{9-x^2} - x \cdot (\sqrt{9-x^2})'}{(\sqrt{9-x^2})^2} = \frac{1 \cdot \sqrt{9-x^2} - x \cdot \frac{1}{2}(9-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (9-x^2)'}{9-x^2} = \\ &= \frac{\sqrt{9-x^2} - \frac{x}{2\sqrt{9-x^2}} \cdot (-2x)}{9-x^2} = \frac{9-x^2+x^2}{(9-x^2) \cdot \sqrt{9-x^2}} = 9 \cdot (9-x^2)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Definiční obor f' $D(f') = (-3, 3)$

Příklad 2 (i)

$$f(x) = \frac{x^2(1-x)^3}{1+x}$$

Definiční obor f $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Derivace f

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2(1-x)^3}{1+x} \right)' = \frac{(x^2(1-x)^3)' \cdot (1+x) - (x^2(1-x)^3) \cdot (1+x)'}{(1+x)^2} = \\ &= \frac{((x^2)'(1-x)^3 + x^2((1-x)^3)') \cdot (1+x) - x^2(1-x)^3}{(1+x)^2} = \\ &= \frac{(2x(1-x)^3 + x^2(3(1-x)^2 \cdot (1-x)')) \cdot (1+x) - x^2(1-x)^3}{(1+x)^2} = \\ &= \frac{2x(1-x)^3(1+x) - 3x^2(1-x)^2(1+x) - x^2(1-x)^3}{(1+x)^2} = \\ &= \frac{x(1-x)^2(2(1-x^2) - 3x(1+x) - x(1-x))}{(1+x)^2} = \frac{x(1-x)^2(2 - 2x^2 - 3x - 3x^2 - x + x^2)}{(1+x)^2} = \\ &= \frac{x(1-x)^2(2 - 4x^2 - 4x)}{(1+x)^2} \end{aligned}$$

Definiční obor f'

$$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Příklad 2 (j)

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Definiční obor f $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Derivace f

$$f'(x) = \left(e^{-\frac{1}{x^2}} \right)' = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right)' = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot (-1)(-2)x^{-3} = 2e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{1}{x^3}$$

Definiční obor f'

$$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Příklad 2 (k)

$$f(x) = x^x$$

Definiční obor f $D(f) = (0, \infty)$, protože z definice obecné mocniny plyne, že $x^x = e^{x \log x}$.

Derivace f

Využijeme vzorec $a = e^{\log a}$ pro $a > 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^x)' = \left(e^{x \log x} \right)' = e^{x \log x} \cdot (x \log x)' = e^{x \log x} \cdot (x' \cdot \log x + x \cdot (\log x)') = \\ &= e^{x \log x} \cdot \left(\log x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x \cdot (\log x + 1) \end{aligned}$$

Definiční obor f'

$$D(f') = (0, \infty)$$

Příklad 2 (l)

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Definiční obor f

$$D(f) = (0, \infty)$$

Derivace f

Využijeme vzorec $a = e^{\log a}$ pro $a > 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}} \right)' = \left(e^{\frac{1}{x} \log \frac{1}{x}} \right)' = \\ &= e^{\frac{1}{x} \log \frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x} \log \frac{1}{x} \right)' = \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\left(\frac{1}{x} \right)' \log x + x \cdot (\log x)' \right) = \\ &= \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \log x + x \frac{1}{x} \right) = \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{-\log x}{x^2} + 1 \right) \end{aligned}$$

Definiční obor f'

$$D(f) = (0, \infty)$$

Příklad 2 (m)

$$f(x) = (\sin x)^{\cos x}$$

Definiční obor f

Opět z definice obecné mocniny plyne, že je potřeba, aby $\sin x > 0$. Tedy $D(f) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, \pi + 2k\pi)$.

Derivace f

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{\cos x \cdot \log \sin x} \right)' = \\ &= e^{\cos x \cdot \log \sin x} \cdot (\cos x \cdot \log \sin x)' = e^{\cos x \cdot \log \sin x} \cdot ((\cos x)' \cdot \log \sin x + \cos x \cdot (\log \sin x)') = \\ &= e^{\cos x \cdot \log \sin x} \cdot \left(-\sin x \log \sin x + \cos x \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' \right) = e^{\cos x \cdot \log \sin x} \cdot \left(-\sin x \log \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) \end{aligned}$$

Definiční obor f'

$$D(f') = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, \pi + 2k\pi).$$

Příklad 2 (n)

$$f(x) = \arcsin(\cos x)$$

Definiční obor f Definiční obor $\arcsin$ je interval $[-1, 1]$ a obor hodnot $\cos$ je $[-1, 1]$.

Proto $D(f) = D(\cos) = \mathbb{R}$.

Derivace f

$$f'(x) = (\arcsin(\cos x))' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\cos x)^2}} \cdot (\cos x)' = \frac{-\sin x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$$

Definiční obor f'

$$D(f') = \mathbb{R}$$

Příklad 2 (o)

$$f(x) = \log(\arccos x)$$

Definiční obor f

$$D(f) = [-1, 1)$$

Derivace f

$$f'(x) = (\log(\arccos x))' = \frac{1}{\arccos x} \cdot (\arccos x)' = \frac{1}{\arccos x} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Definiční obor f'

$D(f') = (-1, 1)$ a v bodě -1 má funkce pouze jednostrannou derivaci.

Příklad 2 (p)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{2}}{x}$$

Definiční obor f

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Derivace f

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{2}}{x} \right)' = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{x} \right)^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{x} \right)' = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{x^2}} \cdot \sqrt{2} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2}{2 + x^2} \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{2 + x^2} \end{aligned}$$

Definiční obor f'

$$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Příklad 2 (q)

$$f(x) = e^{x^2-x+1} - \log \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$$

Definiční obor f

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Derivace f

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(e^{x^2-x+1} - \log \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}} \right)' = \\
&= e^{x^2-x+1} \cdot (x^2 - x + 1)' - \frac{1}{\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}} \cdot \left(\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}} \right)' = \\
&= e^{x^2-x+1} \cdot (2x + 1) - \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} \right)' = \\
&= e^{x^2-x+1} \cdot (2x + 1) - \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(e^{2x})' \cdot (e^{2x}+1) - e^{2x} \cdot (e^{2x}+1)'}{(e^{2x}+1)^2} = \\
&= e^{x^2-x+1} \cdot (2x + 1) - \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2e^{2x} \cdot (e^{2x}+1) - e^{2x} \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \\
&= e^{x^2-x+1} \cdot (2x + 1) - \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2e^{2x} (1 - e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2} = \\
&= e^{x^2-x+1} \cdot (2x + 1) - \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}} \cdot \frac{e^{2x} (1 - e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2}
\end{aligned}$$

Definiční obor f'

$$D(f') = \mathbb{R}$$

Příklad 2 (r)

$$f(x) = \arctan \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\log x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Definiční obor f

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus (0, 1)$$

Derivace f

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\arctan \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\log x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right)' = \\
&= \frac{1}{1 + (\sqrt{x^2 - 1})^2} \cdot (\sqrt{x^2 - 1})' - \frac{(\log x)' \cdot \sqrt{x^2 - 1} - \log x \cdot (\sqrt{x^2 - 1})'}{(\sqrt{x^2 - 1})^2} = \\
&= \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot (x^2 - 1)' - \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x^2 - 1} - \log x \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{x^2 - 1})^{-1} \cdot (x^2 - 1)'}{x^2 - 1} = \\
&= \frac{2x}{2x^2 \cdot \sqrt{x^2 - 1}} - \frac{x^{-1} \sqrt{x^2 - 1} - \log x \cdot \frac{2x}{2} \cdot 2x}{x^2 - 1} = \\
&= \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}} - \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \log x \cdot 2x^2}{x^3 - x}
\end{aligned}$$

Definiční obor f'

$$D(f') = \mathbb{R} \setminus (0, 1)$$

Příklad 2 (s)

$$f(x) = x (\arcsin(x^3))^2$$

Definiční obor f $D(f) = [-1, 1]$

Derivace f

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x (\arcsin(x^3))^2 \right)' = x' \cdot (\arcsin(x^3))^2 + x \cdot \left((\arcsin(x^3))^2 \right)' = \\ &= (\arcsin(x^3))^2 + x \cdot 2 \cdot \arcsin(x^3) \cdot (\arcsin(x^3))' = \\ &= (\arcsin(x^3))^2 + 2x \cdot \arcsin(x^3) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(x^3)^2}} \cdot (x^3)' = \\ &= (\arcsin(x^3))^2 + 2x \cdot \arcsin(x^3) \cdot \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}} \end{aligned}$$

Definiční obor f'

$D(f') = (-1, 1)$ a v krajních bodech existují jednostranné derivace.

Příklad 3 (a)

$$f(x) = |x|$$

Definiční obor f

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Derivace f

$$\text{Platí, že } f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (-\infty, 0) \\ 0, & x = 0 \\ x, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Počítejme f' na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ zvlášť. Na závěr vyřešíme bod 0.

Pro $x \in (-\infty, 0)$ platí:

$$f'(x) = (-x)' = -x' = -1$$

Pro $x \in (0, \infty)$ platí:

$$f'(x) = x' = 1$$

V bodě 0 spočítáme nejdříve jednostranné derivace. Funkce f je v 0 zleva i zprava spojitá, tedy dle věty 44 z kapitoly 4 z přednášky (platí i její varianta pro derivaci zleva) platí, že $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1$ a $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$.

V bodě 0 má funkce f pouze jednostranné derivace, neb se neshodují.

Definiční obor f'

$$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Příklad 3 (b)

$$f(x) = \min\{x^2, -x^2 + 3x\}$$

Definiční obor f

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Derivace f

Nejdříve zjistíme, jak ta funkce vlastně „vypadá“. Tj. vyšetřeme, na kterých intervalech je která z funkcí v minimu větší. Řešme tedy následující nerovnost.

$$\begin{aligned}x^2 &< -x^2 + 3x \\2x^2 - 3x &< 0 \\x(2x - 3) &< 0 \\x\left(x - \frac{3}{2}\right) &< 0\end{aligned}$$

Řešením nerovnosti je $x \in (0, \frac{3}{2})$. Z toho dostáváme následující.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (0, \frac{3}{2}) \\ -x^2 + 3x, & x \in \mathbb{R} \setminus (0, \frac{3}{2}) \end{cases}$$

Počítejme tedy f' na intervalech $(0, \frac{3}{2})$, $(-\infty, 0)$, $(\frac{3}{2}, \infty)$ zvlášť a pak vyřešme body 0 a $\frac{3}{2}$. Pro $x \in (0, \frac{3}{2})$ platí:

$$f'(x) = (x^2)' = 2x.$$

Pro $x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$ platí:

$$f'(x) = (-x^2 + 3x)' = -2x + 3.$$

Opět dle věty 44 z kapitoly 4 z přednášky platí následující.

$$\begin{aligned}f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} 2x = 0 \\f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} -2x + 3 = 3 \\f'_+(\frac{3}{2}) &= \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}+} -2x + 3 = 0 \\f'_-(\frac{3}{2}) &= \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}-} 2x = 3\end{aligned}$$

Jednostranné derivace se neshodují, tedy derivace jako takové v daných bodech neexistují.

Definiční obor f'

$$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{3}{2}\}$$

Příklad 3 (c)

$$f(x) = |\log |x||$$

Definiční obor f

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Derivace f

Nejdříve vyšetříme funkci. Z definice absolutní hodnoty plyne, že:

$$f(x) = \begin{cases} \log x, & x \in [1, \infty) \\ -\log x, & x \in [0, 1) \\ -\log(-x), & x \in (-1, 0) \\ \log(-x), & x \in (-\infty, -1] \end{cases}$$

Počítejme na intervalech zvlášť.

$$x \in (1, \infty) \implies f'(x) = (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$x \in (0, 1) \implies f'(x) = (-\log x)' = -\frac{1}{x}$$

$$x \in (-1, 0) \implies f'(x) = (-\log(-x))' = -\frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x} \cdot (-1) = -\frac{1}{x}$$

$$x \in (-\infty, -1) \implies f'(x) = (\log(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}$$

Dále platí dle věty 44 z kapitoly 4 z přednášky:

$$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{1}{x} = -1$$

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} -\frac{1}{x} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} -\frac{1}{x} = -\infty$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} -\frac{1}{x} = -\infty$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} -\frac{1}{x} = -1$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x} = 1$$

V bodech $\{-1, 0, 1\}$ jednostranné derivace buď neexistují (vycházejí nekonečno) nebo nevycházejí stejně. Proto ve zmíněných bodech derivace neexistují.

Definiční obor f'

$$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$$

Příklad 3 (d)

Definiční obor $f(x) = e^{\log|x|}$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Všimněme si, že na definičním oboru lze funkci přepsat jako $f(x) = |x|$

$$\text{Pak } f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (-\infty, 0) \\ x, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Derivace f

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, 0) \\ 1, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Definiční obor f'

$$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Příklad 3 (e)

$$\text{Definiční obor } f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 0] \\ \log(1+x) & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Derivace f Derivujeme pouze na otevřených intervalech, krajní bod vyřešíme zvlášť.

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{1+x} & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

V nule vyšetříme z definice:

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\log(1+h) - \log(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\log(1+h)}{h} \stackrel{\text{známá}}{=} \lim 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{0+h-0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h}{h} = 1$$

Tedy limita v nule je rovna jedné (protože se jednostrané limity rovnají).

Definiční obor f'

$$D(f') = \mathbb{R}$$