

1, d, indukce: $n=1: \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} = LS$

$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} = PS$

$n \leadsto n+1: \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$

$= \frac{n \cdot (n+2) + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$, což jsme chtěli

1, e, indukce: $n=1: 5^n - 1 = 5^1 - 1 = 4$, což je dělitelné čtyřmi

$n \leadsto n+1: 5^{n+1} - 1 = 5 \cdot 5^n - 1 = 4 + 4 + 4 =$

$= 5 \cdot 5^n - 5 + 4 = 5 \cdot (5^n - 1) + 4$

Pak $5 \cdot (5^n - 1) + 4$ je dělitelné 4.

je dělitelné 4, protože

$5^n - 1$ je dělitelné

4 dle indukčního předp.

2) a)

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$	$A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$
1	0	1	1
0	1	0	1

↑ ↑
 tyto sloupce
 jsou stejné,
 tedy $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$

(respektive poslední
 sloupec jsou samé 1)

2) b)

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

tolik řádků, kolik je variant 1,0 pro atomární
 v'roky (tj: má'm $A, B \rightarrow 2^2 = 4$ řádků
 $A, B, C \rightarrow 2^3 = 8$ řádků)

2) c)

A	$\neg A$	$A \vee (\neg A)$
1	0	1
0	1	1

2) d)

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg(A \Rightarrow B)$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$C \Leftrightarrow D$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1

2) e)

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$C \Leftrightarrow D$
1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

G	F	E	D	C	B	A
$F \Rightarrow G$	1	1	1	1	1	1
$A \Rightarrow C$	1	0	1	0	1	1
$D \wedge E$	1	0	0	0	1	1
$B \Rightarrow C$	1	0	1	1	0	1
$A \Rightarrow B$	1	1	0	0	1	1
C	1	0	1	0	1	0
B	1	1	0	0	1	0
A	1	1	1	1	0	0

2) f)

3) $A =$ kuře snědl Aar $B =$ kuře snědl ~~Aar~~ Brok
 $C =$ kuře snědl Cicero. Víme, že $A \vee B \vee C$.

Podmínka a) máme říka, že: $C \Rightarrow A$

b) máme říka, že: $B \Rightarrow (A \vee C)$

Tedy ~~Aar~~ se na smísení kuřete jistě podílel.

4) A, B, C stejně jako předtím. Víme, že $A \vee B \vee C$.

a) máme říka, že $A \Rightarrow (B \vee C)$

b) máme říka $\neg C$

Tedy Brok se na smísení kuřete jistě podílel.

5) A, B, C stejně jako předtím.

a) máme říka, že $A \vee B \vee C$.

b) — " — $A \Rightarrow ((B \vee C) \wedge (B \Rightarrow \neg C) \wedge (C \Rightarrow \neg B))$

c) — " — $\neg B \Rightarrow \neg C$

d) — " — $(A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge C \wedge \neg B) \vee (C \wedge B \wedge \neg A) \Rightarrow A$

e) — " — $\neg C \Rightarrow \neg B$

Řešení: $(A \Rightarrow ((B \vee C) \wedge (B \Rightarrow \neg C) \wedge (C \Rightarrow \neg B)))$ (b)

ale c) + e) $\neg B \Leftrightarrow \neg C$, takže (A) to být nemohl
rovněž $\neg B \Leftrightarrow \neg C$, tedy $\neg B \wedge C$ nebo $B \wedge \neg C$.

druhý případ můžeme vyloučit díky a), ale
 $B \wedge C$ také nemůže platit díky d),

b) a) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{N} : x > x \Rightarrow x > y$
 ověřen: pravdivosti n/že

Znegování = $\neg \rightarrow \exists$

$\exists \rightarrow \neg$

a znegovat to za kvantifikátory

znegujeme tedy výraz $z > x \Rightarrow x > y$

Dle 2) d) platí, že místo $\neg(z > x \Rightarrow x > y)$ můžeme psát $x > x \wedge \neg(z > y)$, přičemž $\neg(z > y)$ je $x \leq y$.

znegovaný výrok je tedy: $\exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} \exists z \in \mathbb{N} : x > x \wedge x \leq y$

Pravdivost původního výroku:

zaměnili jsme $\exists y$ kvantifikátory

Výrok znamená: Pro každé přirozené x existuje přirozené y takové, že pro každé přirozené z platí $x > x \Rightarrow x > y$.

Zvolme tedy libovolné přirozené číslo $x \in \mathbb{N}$

Poté zvolíme $y := x$, pak pokud $x > x = y$, tak z toho plyne, že $x > y$.

(To nám stačí, neb stačí najít 1 y , které splňuje zbytek a z jisté úvahy libovolné, takže to platí pro všechna $z \in \mathbb{N}$).

6) b) Tedy pravdivý

$\forall x, y \in \mathbb{R} : xy \geq 0 \Rightarrow x + y \geq 0$

Pravdivost výroku: výrok neplatí, protože např. pro $x = -3, y = -5$ platí, že

$$x \cdot y = (-3) \cdot (-5) = 15 \geq 0, \text{ ale } x + y = -3 - 5 = -8 \neq 0$$

(tzv. protipříklad)

Negace: stejný postup jako v 6) a)

$$\exists x, y \in \mathbb{R} : xy \geq 0 \wedge x + y < 0$$

6) c) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$

Pravdivost: nepravdivý -

pro $x=0$ neexistuje y t. z. $0 \cdot y = 1$ = Fakore! že

Negace: $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x \cdot y \neq 1$

6) d) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$

Pravdivost: pokud $x \neq 0$, pak se jím dá rovnice $x \cdot y = 1$ vydelet.

Dostaneme $y = \frac{1}{x}$, což je reálné číslo a t. z. $x \cdot y = 1$

Našli jsme tedy $y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$

Pravdivý

Negace: $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \forall y \in \mathbb{R} : x \cdot y \neq 1$

6) e) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{Q} : y \leq x \wedge x < y+1$

Pravdivost: zvolme $x \in \mathbb{R}$. Pokud $\exists y \in \mathbb{Q}$ splňující vstřih, pak pro něj musí -

pravdivý

platit: $y \leq x$ a $x-1 < y$

tedy musí $y \in (-\infty, x]$, $y \in (x-1, \infty)$ a $y \in \mathbb{Q}$

tedy $y \in (x-1, x] \cap \mathbb{Q}$

└ pokud $x \in \mathbb{Z}$, pak za y lze volit x

└ pokud $x \notin \mathbb{Z}$, pak musí existovat celé číslo v intervalu $(x-1, x]$, neboť jde o interval délky 1 a celá čísla jsou od sebe o 1 a je jich nekonečně mnoho. Pak za y volíme právě toto celé číslo. ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$)

Pozn.: souvisí -

s hustotou $\mathbb{Q} \sim \mathbb{R}$

Negace: $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{Q} : y > x \vee x \geq y+1$

neboť $(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ (dá se ověřit podobně jako 2. p.)

6) f) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{N} : y \leq x \wedge x < y+1$

Pravdivost: nepravdivý - např. pokud $x = -1 \in \mathbb{R}$, pak neexistuje $y \in \mathbb{N}$ t. z. $y \leq -1$

Negace: $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{N} : y > x \vee x \geq y+1$

7, a, $\forall m \in M, \forall z \in Z: S(m, z) \Rightarrow L_1(m, z)$

b, $\forall z \in Z, \exists m \in M: L_1(m, z)$

c, $\forall m \in M \forall z_1, z_2 \in Z: (S(m, z_1) \wedge S(m, z_2)) \Rightarrow z_1 = z_2$

d, $\exists z \in Z \exists m \in M: S(m, z)$

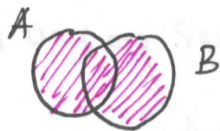
e, $\exists z \in Z \exists m_1, m_2 \in M: S(m_1, z) \wedge L_2(m_2, z)$

f, Existuje svobodný muž.

g, Existuje žena, která nemá ráda nikoho, kdo má rád ji.

h, Existuje žena, kterou nemá rád žádný muž, který má ráda ona.

8) a) $\emptyset \subseteq A$ - plyne z definície inkluzie



8) b) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$

Dokazanie rovnosti množín znamená dokázať, že x je prvkom jednej množiny práve vtedy, keď x je prvkom druhej.

Platí $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$ (dle definície sjednocení množín)

$$\text{a } x \in B \Leftrightarrow x \in B \cap A \vee x \in B \setminus A$$

$$\text{Tedy } x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cap A \vee x \in B \setminus A \quad (1)$$

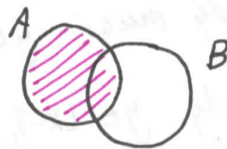
$$\text{Navíc platí } x \in A \vee x \in B \cap A \Leftrightarrow x \in A \quad (2)$$

$$\text{Z (1) a (2) plyne, že } x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \setminus A$$

$$\text{a to platí } \Leftrightarrow x \in A \cup (B \setminus A) \text{ dle definície sjednocení množín.}$$

Dokazali sme, že $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \cup (B \setminus A)$

8) c) obdobne: $x \in A \Leftrightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \setminus B$



8) d) $A \cap B = A$ znamená, že $x \in A \Leftrightarrow x \in A \cap B \quad (3)$

$A \subseteq B$ znamená, že $x \in A \Rightarrow x \in B \quad (4)$

Stačí tedy dokázať, že $(3) \Leftrightarrow (4)$

$$(3) \Rightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

- máme dokázať, že $(3) \Rightarrow (4)$

$$\text{neboť } x \in A \cap B \Rightarrow x \in B$$

dokážme, že $(4) \Rightarrow (3)$

pokiaľ $x \in A$, pak dle (4) platí, že $x \in B$. Tedy $x \in A \cap B$. Z toho plyne, že

$$(4) \text{ implikuje } x \in A \Rightarrow x \in A \cap B.$$

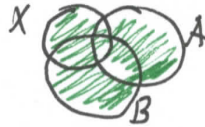
Podobne ukážeme, že (4) implikuje $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$, budeme m/ť, že

$$(4) \Rightarrow (3) \quad (\text{neboť } (C \Rightarrow D \wedge D \Rightarrow C) \Leftrightarrow (C \Leftrightarrow D))$$

Máme-li $x \in A \cap B$, pak platí, že $x \in A$ (z definície prieniku množín).

Platí tedy, že (4) implikuje $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ a máme hocoro

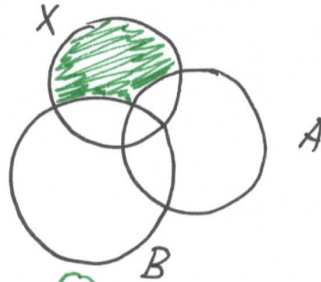
$$g) e) X \cup (A \cup B) = (X \cup A) \cup B$$



$$x \in X \cup (A \cup B) \Leftrightarrow x \in X \vee x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in X \vee (x \in A \vee x \in B) \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} (x \in X \vee x \in A) \vee x \in B \Leftrightarrow x \in (X \cup A) \cup B$$

$$(*) (A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C) \quad - \text{ lze ověřit jako v Pr. 2}$$

$$d) f) X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$$



$$x \in X \setminus (A \cup B) \Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin (A \cup B)$$

$$\Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin A \wedge x \notin B \stackrel{(\heartsuit)}{\Leftrightarrow} (x \in X \wedge x \notin A) \wedge (x \in X \wedge x \notin B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in X \setminus A \wedge x \in X \setminus B \Leftrightarrow x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$$

$$(\heartsuit) A \cap B \cap C \Leftrightarrow (A \cap B) \cap (A \cap C) \quad - \text{ lze ověřit jako v Pr. 2}$$