1) a) $A = \{5,6\}$ $\inf A = 5 = \min A$, $\sup A = 6 = \max A$

1) b) $B = [-2,5)$

$\inf B = -2 = \min B$, $\sup B = 5$, $\max A$ neexistuje

Dokažme pořádně, že $-2 = \inf B$ - ověřme definici

(i) $\forall x \in B : x \geq -2$ - to je pravda (plyne z definice intervalu)

(ii) $\forall g' \in \mathbb{R}, g' > g\ \exists x \in B : x < g'$

zvolme $g' \in \mathbb{R}, g' > -2$

pak $\exists x \in (-2, g')$ a pro toto x platí: $x < g'$

-2 splňuje definici infima, jde tedy o infimum.

Podobně se dokáže, že $5 = \sup B$. 5 ale není maximum, neboť není prvkem množiny B.

Naopak číslo -2 je minimum množiny, neb je infimem a je prvkem množiny B.

1) c) $C = (-2,0] \cup \{1\} \cup \underbrace{((2,4] \cap (3,4))}_{=(3,4)} = (-2,0] \cup \{1\} \cup (3,4)$

$\inf C = -2$, $\sup C = 4$, $\min C$ a $\max C$ $\nexists$

1) d) $D = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$

nerovnost $q^2 \leq 2$ splňují právě čísla, pro která platí: $-\sqrt{2} \leq q \leq \sqrt{2}$

Tedy $D = \mathbb{Q} \cap [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

kandidátem na $\inf \mathbb{Q}$ je č. $-\sqrt{2}$. ověřme definici infima.

(i) $\forall x \in D : x \geq -\sqrt{2}$ (zřejmé)

(ii) zvol. $g' \in \mathbb{R}, g' > -\sqrt{2}$ zajímá nás, jestli $D \cap (-\sqrt{2}, g')$ obsahuje nějaký prvek

pokud $g' \geq \sqrt{2}$, pak $D \cap [-\sqrt{2}, g') = D$, což je neprázdná mn. (obsahuje 0).

pokud $g' < \sqrt{2}$, pak $D \cap (-\sqrt{2}, g') = \mathbb{Q} \cap (-\sqrt{2}, g')$, což je též neprázdná množina.

Tedy skutečně $-\sqrt{2} = \inf D$

Podobně $\sup D = \sqrt{2}$

D ale nemá maximum ani minimum, neb $-\sqrt{2}$ ani $\sqrt{2}$ nejsou prvky D (nejde o racionální čísla).

1, e) z definice suprema (viz teorie):

$\sup(E) = 0$, $\inf(E)$ neexistuje

- protože $\sup(E) \notin E$, tak maximum E neexistuje
- protože $\inf(E)$ $\nexists$, tak minimum E neexistuje

f) z definice suprema:

$\sup(F) = 0$, $\inf(F)$ neexistuje

- $\sup(F) \in F$, tedy $\max(F) = \sup(F) = 0$
- $\inf(F)$ $\nexists$, pak minimum také neexistuje.

g) $\sin(x)$ periodicky mění znaménko.

- Uvažujme nejdříve $x > 0$:

  → pro každé $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_1 > 0$ existuje $x_2 \in \mathbb{R}$, $x_2 > x_1$ takové, že $\sin(x_2) < 0$, potom x_2 splňuje nerovnost: $x_2 \cdot \sin(x_2) < 1$ (neboť $x_2 \cdot \sin(x_2)$ záporné!) a tedy $x_2 \in G$.

  Protože toto platí pro libovolné x_1, neexistuje ani supremum ani maximum.

- Uvažujme dále $x < 0$:

  - pro každé $X_1 \in \mathbb{R}$, $x_1 < 0$ existuje $x_2 \in \mathbb{R}$ $x_2 < X_1$ takové, že $\sin(x_2) > 0$, potom x_2 splňuje nerovnost $x_2 \cdot \sin(x_2) < 1$ (neboť $x_2 \cdot \sin(x_2)$ je záporné) a tedy $x_2 \in G$.

  Protože toto platí pro libovolné x_1, neexistuje ani infimum ani minimum.

2,a) $A = \left\{ \frac{p}{p+q} : p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N} \right\}$

- Jelikož $p, q \in \mathbb{N}$, zlomek $\frac{p}{p+q}$ bude vždy kladný! Tedy $\inf A \geq 0$.

Jaké nejmenší a největší hodnoty může $\frac{p}{p+q}$ nabývat?

- pokud za p dosadíme 1, máme zlomek $\frac{1}{1+q}$. Čím větší bude q, tím menší bude celkový zlomek. Dokonce se tak dá vyrobit libovolně malé kladné číslo. - Tj.: $\forall \varepsilon > 0\ \exists q: \frac{1}{1+q} < \varepsilon$

  za q lze vzít nějaké přirozené číslo větší, než $\frac{1}{\varepsilon} - 1$ (a tak velké přirozené č. určitě $\exists$)

  Z toho plyne: $\inf A = 0$

  $\min A\ \nexists$, neboť $0 \notin A$.

- čitatel je menší než jmenovatel ve zlomku $\frac{p}{p+q}$ (neb $q > 0$). Tedy zlomek $\frac{p}{p+q} < 1$ pro libovolné hodnoty p a q. Tedy $\sup A \leq 1$

- zkusme za q vzít 1. Tj. zkoumejme $\frac{p}{p+1}$. Může být tento zlomek libovolně blízko 1? zvolme $\varepsilon \in (0,1)$. zkusme najít p t.ž.: $\varepsilon < \frac{p}{p+1}$

$$\text{pak}\quad (p+1)\varepsilon < p$$
$$\varepsilon p + \varepsilon < p$$
$$p(\varepsilon - 1) < -\varepsilon$$
$$p > \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}$$

– takové přirozené číslo p jistě $\exists$

Tedy $\forall \varepsilon \in (0,1)\ \exists p \in \mathbb{N}: \varepsilon < \frac{p}{p+1} < 1$.

Tedy $\sup A = 1$ (definice suprema)

ale $1 \notin A$, tedy $\min A\ \nexists$.

2) b) $B = \{\sin x : x \in [0, 2\pi]\}$

z grafu fce sinus víme, že $B = [-1, 1]$. Tedy $\inf B = \min B = -1$, $\sup B = \max B = 1$

2) c) $C = \{\sin x : x \in (0, 2\pi)\}$

opět z grafu $\boxed{\inf C = \min C = -1,\ \sup C = \max C = 1}$

$C = (-1, 1)$

2) d) $D = \{\sin x : x \in (0, \pi)\}$

graf $\Rightarrow$ $D = (0, 1]$ $\Rightarrow$ $\inf D = 0$, $\min D \nexists$, $\sup D = \max D = 1$

2) e) $E = \{n^2 - m^2 : n, m \in \mathbb{N}\}$

- $n = 1 \Longrightarrow 1 - m^2$ - pro libovolně velké m je výraz $1 - m^2$ libovolně malý, není zdola omezený. Proto $\inf E = -\infty$, tedy infimum neexistuje, neb nám nevyšlo reálné číslo

  graf $y = 1 - x^2$ je $\cap$

- $m = 1 \to n^2 - 1$

  podobnou úvahou $\sup E = \infty$, tedy $\sup E \nexists$

$\min E$ a $\max E$ $\nexists$

f) • supremum ani maximum neexistuje:
↳ můžeme vzít libovolně velké n a m co nejmenší
• $\inf(F) = \min(F) = 3$:
↳ bereme rozdíl dvou čtverců (druhých mocnin přirozených čísel). Kvůli podmínce $n > m$ víme, že nikdy nebude záporný. Vezmeme tedy nejmenší možné $n > m \in \mathbb{N}$ a to $n = 2$ a $m = 1$ $(0 \notin \mathbb{N})$.
Pak $n^2 - m^2 = 2^2 - 1^2 = 3$.

g) • infimum ani minimum neexistují:
↳ můžeme vzít libovolně velké m a n co nejmenší
• $\sup(G) = \max(G) = 0$:
↳ Podobnou argumentací jako v f, jen $n \leq m$ umožňuje vzít $n = m$.

h) • $\sup(H) = \max(H) = \frac{5}{6}$:
⇒ víme, že $\left(\frac{1}{2}\right)^{n_1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{n_2} \iff n_1 < n_2 \ \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ (totéž platí pro $\frac{1}{3}$).
tedy supremum získáme pro $n = 1$:
$2^{-1} + 3^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$
• $\inf(H) = 0$, minimum neexistuje:
→ $2^{-n} + 3^{-n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ (z vlastnosti exponenciály)
→ zároveň ale z pozorování u suprema vyplývá, že pro libovolně malé $\varepsilon > 0$ dokážeme najít n_1, že $\frac{\varepsilon}{2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{n_1}$ a n_2, že $\frac{\varepsilon}{2} > \left(\frac{1}{3}\right)^{n_2}$.
Potom vezme $n_3 = \min\{n_1, n_2\}$ a pro něj platí $0 < 2^{-n_3} + 3^{-n_3} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
tedy $\inf(H) = 0$, ale 0 nenabýváme.

i) • $\sup(I)$ ani $\max(I)$ neexistuje:
→ můžeme brát $n \in \mathbb{Z}$, tedy pro záporné n dostáváme 2 na nějakou kladnou mocninu, což jde do nekonečna (totéž pro 3). Tedy i jejich součet nelze shora omezit
• $\inf(I) = 0$, minimum neexistuje:
→ totéž jako u předchozího

j.) • $\sup(J)$ ani $\max(J)$ neexistují, $\inf(J) = 0$, minimum neexistuje:
velice podobná argumentace jako u předchozího

3) a) $A \cup B$

K množině A jsme přidali čísla z množiny B. Tím se nám v nově vzniklé množině mohlo objevit tedy číslo, které je větší než sup A. Proto $\sup(A \cup B) \geq \sup A$.

Podobně $\sup(A \cup B) \geq \sup B$.

proto platí, že $\sup(A \cup B) \geq \max\{\sup A, \sup B\}$.

Dokonce platí, že $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$, neboť množina $A \cup B$ nemůže obsahovat něco, co je nad supremem množiny A a supremem množiny B.

Analogicky $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$

3) b) $A \cap B$

Podobnými úvahami jako v 3) a). $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$

$\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\}$

3) c) $A \setminus B$

Podobně: $\sup(A \setminus B) \leq \sup A$ (neb z mn. A jsme odebrali čísla)

$\inf(A \setminus B) \geq \inf A$

(tedy jsme mohli odebrat čísla, která byla u toho suprema)

3) d) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

3) c) $\Rightarrow$ $\sup(A \triangle B) \leq \sup(A \cup B) \overset{3)a)}{=} \max\{\sup A, \sup B\}$

3) c) $\Rightarrow$ $\inf(A \triangle B) \geq \inf(A \cup B) \overset{3)a)}{=} \min\{\inf A, \inf B\}$

3, e, $\sup(-A) = -\inf(A)$; $\inf(-A) = -\sup(A)$

f, $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$; $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$

g, $\sup(A-B) = \sup(A) - \inf(B)$; $\inf(A-B) = \inf(A) - \sup(B)$

h, $\sup(A\cdot B) = \max\{\sup(A)\cdot\sup(B), \sup(A)\cdot\inf(B), \inf(A)\sup(B), \inf(A)\cdot\inf(B)\}$

$\inf(A\cdot B) = \min\{$ ———— " ———— $\}$

4) a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^4 < 16\}$

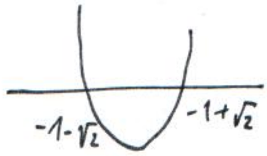
$$x^4 < 16 \Rightarrow x \in (-\sqrt[4]{16}, \sqrt[4]{16}) = (-2, 2)$$

Tedy $A = (-2, 2)$, tedy $\inf A = -2$, $\min A \nexists$, $\sup A = 2$, $\max A \nexists$

4) b) $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x \leq 1\}$

$$x^2 + 2x - 1 \leq 0 \qquad D = 4 + 4 = 8 \qquad \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} -1 + \sqrt{2} \\ -1 - \sqrt{2} \end{cases}$$



$x \in [-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}]$

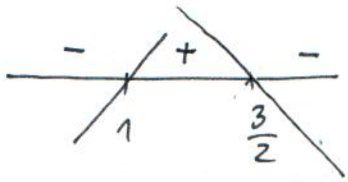
$\Rightarrow B = [-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}] \Rightarrow \inf B = \min B = -1-\sqrt{2}$, $\sup B = \max B = -1+\sqrt{2}$

4) c) $C = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x-1} > 2\}$ podmínka: $x \neq 1$

$$\frac{1}{x-1} - 2 > 0$$

$$\frac{1 - 2(x-1)}{x-1} > 0$$

$$\frac{1 - 2x + 2}{x-1} > 0$$



$$\frac{3 - 2x}{x-1} > 0$$

$x \in (1, \frac{3}{2})$

$C = (1, \frac{3}{2}) \Rightarrow \inf C = 1$, $\sup C = \frac{3}{2}$, $\max C, \min C \nexists$

4) d) $D = \{(-1)^n + \frac{1}{1+n},\ n \in \mathbb{N}\}$

$(-1)^n = \begin{cases} 1, & n \text{ sudé} \\ -1, & n \text{ liché} \end{cases}$

zřejmě $\frac{1}{1+n} \in (0, \frac{1}{2}]$ (největší hodnota, když n nejmenší, tedy, když n = 1 ; nejmenší … největší … „n = ∞")

tedy jistě $(-1)^n + \frac{1}{1+n} \in (-1, \frac{3}{2}]$

kandidát na infimum: -1, na supremum: $\frac{3}{2}$

zlomek $\frac{1}{1+n}$ je s rostoucím n čím dál menší

$(-1)^n + \frac{1}{1+n} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & n = 1 \\ \frac{1}{3}, & n = 2 \\ \vdots & \end{cases}$ – další členy jsou jistě menší, než $\frac{1}{3}$

tedy $\sup D = \max D = \frac{1}{3}$

z řešení příkladu 2) a) víme, že zlomek $\frac{1}{1+n}$ se libovolně blíží 0.

Lze se jím tedy vhodně přiblížit nule a to dokonce tak, že $(-1)^n = -1$:

zvolme $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ t. ž. $0 < \frac{1}{1+n} < \varepsilon$

pokud je n liché, pak $-1 < \frac{1}{1+n} + (-1)^n < -1 + \varepsilon$

a dostáváme se tak libovolně blízko hodnotě -1

je-li n sudé, pak n+1 je liché a $-1 < \frac{1}{1+(n+1)} + (-1)^{n+1} < -1 + \varepsilon$

Tedy $\inf D = -1$ a $\min D \nexists$

hodnoty -1 nelze nabýt

4, e, • $\sup(E) = \max(E) = \frac{2}{3}$:
→ chci odečíst co nejmenší číslo, volím $n=1$
• $\inf(E) = \frac{1}{2}$, $\min(E)$ neexistuje:
→ chci odečíst co největší číslo: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}$ je $\frac{1}{2}$.

f, • $\sup(F) = \max(F) = 1$:
→ pro $n=1$ máme $\cos 2\pi = 1$, kosinus ~~už~~ vyšší hodnoty nabývat nemůže
• $\inf(F) = -1$, minimum neexistuje:
→ pro liché n ~~...~~ „dost velké."

g, • $\sup(G) = 1$, maximum neexistuje:
→ pro n „dost velké": pro libovolné $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$:
$\cos((2n + \frac{1}{2n})\pi) > 1 - \varepsilon$ pro $\forall n > n_0$
• $\min(G) = \inf(G) = 0$:
→ pokud zanedbám periodu ($2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$), pohybuji se stále v prvním kvadrantu ($\frac{\pi}{2n} \leq \frac{\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$), tedy cos je nezáporný. Proto $\inf(G) \geq 0$
Pro $n=1$ ovšem máme $\cos((2 + \frac{1}{2})\pi) = 0$.

h, • $\sup(H) = \max(H) = 1$; $\inf(H) = -1$, minimum neexi(st)je:
stejná argumentace jako v f,

5) a) Mn. A je omezená $\Rightarrow -\infty < \inf A \leq \sup A < \infty$ (tedy $\sup A$ a $\inf A$ jsou konečná čísla)

pak $|x-y|$ je největší, pokud $x-y$ je největší, což se stane, pokud

x je co největší a y je co nejmenší.

Tedy $$|x-y| \leq \underbrace{|\sup A - \inf A|}_{\text{definovaný výraz, neb } \sup A, \inf A \in \mathbb{R}\text{, jde o reálné číslo}}$$

Našli jsme tedy nějakou horní závoru množiny B.

Zároveň zřejmě $0 \leq |x-y|$ pro libovolné x a y.

Tedy nejmenší horní závora bude mezi 0 a $|\sup A - \inf A|$, tedy půjde o reálné číslo, a proto $\exists \sup B$.

Podobnou úvahou $\exists \inf B$, neb ~~dolní závory budou též mezi~~ největší z dolních závor bude mezi 0 a $|\sup A - \inf A|$ □

5) b) z řešení 5)a) již plyne, že $\sup B \leq |\sup A - \inf A| = \sup A - \inf A$

neb $\sup A - \inf A \geq 0$

z výše ~~uvedeno~~ uvedené myšlenky plyne, že dokonce nastala rovnost.

5c) $\inf B = 0$: B sestává z výrazů v absolutní hodnotě, tedy všechny prvky B jsou nezáporné.
Pak i $\inf(B) \geq 0$.
Zároveň pokud vezmeme $x = y$, dostaneme $|x - x| = 0$, tedy $0 \in B$, a proto $\inf(B) = \min(B) = 0$.