

7. cvičení - řešení

24. 11. 2022

Příklad 1 (a) Ukážeme, že $\lim_{x \rightarrow 5} x = 5$. Nechť $\varepsilon > 0$ a položíme $\delta = \varepsilon$. Pak pro $x \in P(5, \delta) : |x - 5| < \delta = \varepsilon$, což jsme chtěli ukázat.

Příklad 1 (b) Ukážeme, že $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$. Nechť $K > 0$. Položíme $\delta = \frac{1}{K}$. Pak pro všechna $x \in P^+(2, \delta)$ máme $x - 2 < \delta = \frac{1}{K}$, ekvivalentně $\frac{1}{x-2} > K$. Vskutku tedy $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$.

Příklad 1 (c) Ukážeme, že $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin x = 0$. Využijeme odhadu $|\sin x| \leq 1$ na $\mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Položíme $\delta = \varepsilon$. Pak pro $x \in P(0, \delta)$ máme $|x \sin x - 0| = |x \sin x| \leq |x| < \delta = \varepsilon$.

Příklad 1 (d) Ukážeme, že limita je rovna nule. Využijeme znalosti $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Nechť $0 < \varepsilon < 1$. Nalezneme $\varepsilon > \delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in P(0, \delta) : \left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right|$, ekvivalentně

$$\begin{aligned} -\varepsilon &< \frac{\sin x}{x} - 1 < \varepsilon \\ 1 - \varepsilon &< \frac{\sin x}{x} < 1 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud pro $x \in P^+(0, \delta)$ máme

$$0 \leq (1 - \varepsilon)x < \sin x < (1 + \varepsilon)x < 2\delta < 2\varepsilon.$$

Pro $x \in P^-(0, \delta)$ máme

$$-2\varepsilon < -2\delta < (1 + \varepsilon)x < \sin x < (1 - \varepsilon)x \leq 0.$$

Odtud již plyne požadovaná limita.

Příklad 1 (e) Ukážeme, že limita neexistuje - pro všechna $A \in \mathbb{R}$ nalezneme ε takové, že pro každé $\delta > 0$ existuje $x \in P(0, \delta)$ takové, že $|f(x) - A| \geq \varepsilon$. Nechť $A \in \mathbb{R}$. Položíme $\varepsilon = \frac{1}{3}$. Nechť $\delta > 0$. Nyní si vezmeme dva body z $P(0, \delta)$, konkrétně $x_1 = -\frac{\delta}{2}$ a $x_2 = \frac{\delta}{2}$. Pak z definice f máme $f(x_1) = 0$ a $f(x_2) = 1$. Pak nutně jedna z těchto funkčních hodnot má vzdálenost od A aspoň $\frac{1}{3}$: kdyby tomu tak nebylo a $|A - 1| < \frac{1}{3}$ a $|A - 0| < \frac{1}{3}$, tak z trojúhelníkové nerovnosti máme $1 = |1 - 0| \leq |1 - A| + |A - 0| < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} < 1$, což je spor.

Příklad 2 a.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x \stackrel{\text{spoj.}}{=} \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

Příklad 2 b.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2)^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right)^2 \stackrel{\text{VoAL}}{=} \infty$$

Příklad 2 c.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} \stackrel{\text{VoAL}}{=} 0$$

Příklad 2 d.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3}{7+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{-3}{\frac{7}{x} + 1} \stackrel{\text{VoAL}}{=} 0$$

Příklad 2 e. Pro pravé prstencové okolí dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow -7+} \frac{-3}{7+x} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \frac{-3}{\lim_{x \rightarrow -7+} (7+x)} = \infty$$

Pro levé prstencové okolí ovšem dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow -7-} \frac{-3}{7+x} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \frac{-3}{\lim_{x \rightarrow -7-} (7+x)} = -\infty$$

Limita tedy neexistuje.

Příklad 2 f.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\log x + 1} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} (\log x + 1)} = 0$$

Příklad 2 g. Pro pravé prstencové okolí dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 1+} [x] - x \stackrel{\text{spoj.} \quad + \text{VoAL}}{=} 1 - 1 = 0.$$

Pro levé prstencové okolí ovšem dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 1-} [x] - x \stackrel{\text{spoj.} \quad + \text{VoAL}}{=} 0 - 1 = -1.$$

Limita tedy neexistuje.

Příklad 2 h.

Platí $\frac{1}{x} - 1 \leq \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}$, a tedy

$$\begin{aligned} \forall x > 0: x \left(\frac{1}{x} - 1 \right) &\leq x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq x \frac{1}{x}, \\ \forall x < 0: x \frac{1}{x} &\leq x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq x \left(\frac{1}{x} - 1 \right). \end{aligned}$$

Platí

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \left(\frac{1}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0+} 1 - x \stackrel{\text{spoj.}}{=} 1 = \lim_{x \rightarrow 0+} 1 = \lim_{x \rightarrow 0+} x \frac{1}{x}$$

Tedy z Věty o dvou strážnících dostáváme $\lim_{x \rightarrow 0+} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$. Analogicky odvodíme $\lim_{x \rightarrow 0-} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$, a tedy $\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$.

Příklad 2 i.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 5)}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 5 \stackrel{\text{spoj.}}{=} 6.$$

Poznamenejme, že výrazem $x - 1$ můžeme dělit, protože je na prstencových okolích bodu 1 nenulový.

Příklad 2 j.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 5)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 5)}{(x - 1)}$$

Na pravých prstencových okolích 1 máme $x - 1 \geq 0$, $\lim_{x \rightarrow 1+} x + 5 = 6 > 0$ a $\lim_{x \rightarrow 1+} x - 1 = 0$, tedy podle Věty 23 ("omezená krát nulová") platí $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x+5)}{(x-1)} = \infty$. Analogicky odůvodníme

$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x+5)}{(x-1)} = -\infty$. Tedy $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+5)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+4x-5}{(x-1)^2}$ neexistuje.

Příklad 2 k.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x + 5 - \frac{1}{x}}{8x^3 + 4x^2 - 3} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3(1 + 3\frac{1}{x^2} + 5\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4})}{x^3(8 + 4\frac{1}{x} - 3\frac{1}{x^3})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + 3\frac{1}{x^2} + 5\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}}{8 + 4\frac{1}{x} - 3\frac{1}{x^3}} \\ &\stackrel{\text{AL}}{=} \frac{1 + 3 \cdot 0 - 5 \cdot 0 - 0}{8 + 4 \cdot 0 - 3 \cdot 0} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Příklad 2 l.

Výraz $\log(x - 3)$ není na žádném prstencovém okolí bodu 2 definován, limita tudíž neexistuje.

Příklad 2 m.

Na pravých prstencových okolích 1 máme $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \geq 0$, $\lim_{x \rightarrow 1+} x = 1 > 0$. Z věty o limitě složené funkce (varianta zprava, zprava) pro $f(y) = \frac{1}{y}$, $A = 0$, $B = \infty$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $c = 1$ s předpokladem (P) (g je na intervalu $(1, \infty)$ prostá) plyne

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \stackrel{\text{VOLSF}}{=} \infty.$$

Tedy podle Věty 23 ("omezená krát nulová") platí

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \infty.$$

Příklad 2 n.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x}{2x^3 + x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - 2)}{x(2x^2 + x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2}{2x^2 + x - 3} \stackrel{\text{spoj.}}{=} \frac{2}{3}$$

Příklad 2 o.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)^{20}(x + 1)^{20}}{(x - 2)^{20}(x + 4)^{10}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 1)^{20}}{(x + 4)^{10}} \stackrel{\text{spoj.}}{=} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \frac{3^{10}}{2^{10}}$$

Příklad 2 p.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^3 + 7x^2 + 6x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^3 + 7x^2 + 6x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 6x^2 + 7x + 6 \stackrel{\text{spoj.}}{=} 6\end{aligned}$$

Příklad 2 q.

Užitím věty o dvou polícajtech na $x - 1 \leq x + \sin x$ dostáváme $\lim_{x \rightarrow \infty} x + \sin x = \infty$.

Příklad 2 r.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2} \cdot \frac{\sqrt{9+2x} + 5}{\sqrt{9+2x} + 5} \cdot \frac{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} \cdot 2 + 2^2}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} \cdot 2 + 2^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(9+2x-25)((\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{(x-8)(\sqrt{9+2x} + 5)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{2(x-8)((\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{(x-8)(\sqrt{9+2x} + 5)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{2((\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{(\sqrt{9+2x} + 5)} \stackrel{\text{spoj.} \quad \pm \text{ VoAL}}{=} \frac{12}{5}\end{aligned}$$

Příklad 2 s.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{1+x}}{x^2 - 9} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{1+x}}{x^2 - 9} \cdot \frac{\sqrt{x+13} + 2\sqrt{1+x}}{\sqrt{x+13} + 2\sqrt{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+13) - 4(1+x)}{x^2 - 9} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3}{x+3} \stackrel{\text{spoj.} \quad \pm \text{ VoAL}}{=} -\frac{1}{16}\end{aligned}$$