8. cvičení - řešení

1. 12. 2022

Příklad 1 (a)

$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \overset{\text{VoAL + VOLSF (S)}}{=} 1$

Nutno poznamenat, že jsme využili toho, že x je kladné, neb $x \to \infty$.

Příklad 1 (b)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \overset{\text{VoAL + VOLSF (P)}}{=} -1$$

Příklad 1 (c)

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} =$$
$$\overset{\text{VOLSF (P) + VoAL}}{=} 0$$

Příklad 1 (d)

$$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \lim_{x\to0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} \overset{\text{spoj.}}{=} \frac{1}{2}$$

Příklad 1 (e)

$$\lim_{x\to-2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8} = \lim_{x\to-2} \frac{2-\sqrt[3]{6-x}}{x^3+8} \cdot \frac{4+2\cdot\sqrt[3]{6-x}+(\sqrt[3]{6-x})^2}{4+2\cdot\sqrt[3]{6-x}+(\sqrt[3]{6-x})^2} =$$
$$= \lim_{x\to-2} \frac{x+2}{(x^3+8)(4+2\cdot\sqrt[3]{6-x}+(\sqrt[3]{6-x})^2)} = \lim_{x\to-2} \frac{1}{(x^2-2x+4)(4+2\cdot\sqrt[3]{6-x}+(\sqrt[3]{6-x})^2)} =$$
$$\overset{\text{VoAL + spoj.}}{=} \frac{1}{120}$$

Použili jsme $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$ a $x^3+8 = (x+2)(x^2-2x+4)$.

Příklad 1 (f)

$$\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})} \overset{\text{VOLSF (P) + VoAL}}{=} \frac{1}{2}$$

Příklad 1 (g)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\cdot\frac{A}{A}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x((\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}\cdot\sqrt[3]{1-x}+(\sqrt[3]{1-x})^2)}{2x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\overset{\text{VOLSF (P) + VoAL}}{=}\frac{3}{2}$$

Kde
$$A=(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}\cdot\sqrt[3]{1-x}+(\sqrt[3]{1-x})^2.$$

Příklad 1 (h)

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{9+x}-2}=$$
$$=\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{9+x}-2}\cdot\frac{A}{A}\cdot\frac{(\sqrt[4]{9+x})^3+2(\sqrt[4]{9+x})^2+4\sqrt[4]{9+x}+8}{(\sqrt[4]{9+x})^3+2(\sqrt[4]{9+x})^2+4\sqrt[4]{9+x}+8}=$$
$$=\lim_{x\to 7}\frac{x^3+6x^2+12x+8-x^2-40x-400}{9+x-16}\cdot\frac{(\sqrt[4]{9+x})^3+2(\sqrt[4]{9+x})^2+4\sqrt[4]{9+x}+8}{A}\overset{\text{VoAL}}{=}$$
$$\overset{\text{VoAL}}{=}\frac{32}{6\cdot 3^5}\lim_{x\to 7}\frac{x^3+5x^2-28x-392}{x-7}=\frac{32}{6\cdot 3^5}\lim_{x\to 7}(x^2+12x+56)\overset{\text{spoj.}}{=}\frac{112}{27}$$

Kde

$$\begin{aligned}A=&(\sqrt{2+x})^5+(\sqrt{2+x})^4\sqrt[3]{x+20}+(\sqrt{2+x})^3(\sqrt[3]{x+20})^2+(\sqrt{2+x})^2(\sqrt[3]{x+20})^3+\\&+\sqrt{2+x}(\sqrt[3]{x+20})^4+(\sqrt[3]{x+20})^5\end{aligned}$$

Přičemž jsme použili, že $x^3+5x^-28x-392=(x-7)(x^2+12x+56)$.

Příklad 1 (i)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}(1+\frac{1}{\sqrt[6]{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}})}{\sqrt{2x}\sqrt{1-\frac{1}{2x}}}\overset{\text{AL}}{=}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\sqrt[6]{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}})}{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{2x}}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{2x}}}=(*)$$

a použijeme věty o limitě složené funkce pro $f(y)=\sqrt{y}$ a $g(x)=1-\frac{1}{2x}$. Máme $\lim_{x\to\infty}g(x)=1$ a f je v bodě 1 spojitá. Dostáváme tedy

$$(*)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\lim\limits_{y\to 1}\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Příklad 1 (j)

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{1+2x-9}{\sqrt{1+2x}+3}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{x-4}=2\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}\overset{\text{AL+spoj.}}{=}2\cdot\frac{4}{6}=\frac{4}{3}.$$

Příklad 1 (k)

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+1}=$$

$$\overset{\mathrm{AL}}{=}\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+1}=(*)$$

a použijeme Větu o limitě složené funkce. Nejdříve v čitateli větu aplikujeme na $f(y)=\sqrt{y}$ a $g(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x}}$. Je $\lim_{x\to\infty}g(x)=1$, a tedy ze spojitosti odmocniny v bodě 1 máme, že $\lim\limits_{y\to 1}\sqrt{y}=1$. V jmenovateli postupujme následovně: položme $f(y)=\sqrt{1+\sqrt{y}}+1$ a $g(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}$. Pak $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$, a tedy ze spojitosti funkce f zprava v bodě 0 máme, že $\lim\limits_{y\to 0^+}f(y)=2$. Odtud

$$(*)=\frac{1}{2}.$$

Příklad 1 (l)

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}-\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{\frac{1}{x}}\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{1}{x}}\left(\sqrt{1+\sqrt{x+x^{\frac{3}{2}}}}+\sqrt{1-\sqrt{x+x^{\frac{3}{2}}}}\right)}=$$

$$\overset{\mathrm{AL}}{=}2\frac{\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{1+\sqrt{x+x^{\frac{3}{2}}}}+\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{1-\sqrt{x+x^{\frac{3}{2}}}}}=(*)$$

a použijeme třikrát větu o limitě složené funkce. V čitateli uvažujme spojitou funkci $f(y)=\sqrt{1+\sqrt{y}}$ a $g(x)=\sqrt{x}$. Pak $\lim_{x\to 0^+}g(x)=0$, a tedy ze spojitosti zprava funkce f v bodě 0 máme $\lim\limits_{y\to 0^+}f(y)=1$. V jmenovateli vyřešíme první limitu: Položme $f(y)=\sqrt{1+\sqrt{y}}$ a $g(x)=x+x^{\frac{3}{2}}$. Pak $\lim_{x\to 0^+}g(x)=0$, a tedy ze spojitosti zprava funkce f máme $\lim\limits_{y\to 0^+}f(y)=1$. Pro druhou limitu ve jmenovateli volíme funkce $f=\sqrt{1-\sqrt{y}}$ a $g(x)=x+x^{\frac{3}{2}}$. Analogicky jako pro první limitu jmenovatele ukážeme, že i v tomto případě $\lim\limits_{y\to 0^+}f(y)=1$. Odtud máme

$$(*)=1.$$

Příklad 1 (m)

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{3}}((x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}((x+1)^2-(x-1)^2)}{(x+1)^{\frac{4}{3}}+(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{4}{3}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}\left((1+\frac{1}{x})^{\frac{4}{3}}+(1+\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}}(1-\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}}+(1-\frac{1}{x})^{\frac{4}{3}}\right)} =$$

$$\stackrel{\text{AL}}{=} 4\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{4}{3}}+\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}}\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}}+\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{\frac{4}{3}}} = (*)$$

a použijeme čtyřikrát větu o limitě složené funkce. Ukážeme první z limit jmenovatele; ostatní se spočítají analogicky. Položme $f(y) = (1+y)^{\frac{4}{3}}$ a $g(x) = \frac{1}{x}$. Je $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, a tedy ze spojitosti funkce f v bodě 0 máme $\lim\limits_{y\to 0} f(y) = 1$. Odtud plyne, že

$$(*) = \frac{4}{3}.$$

Příklad 1 (n) Spočtěme nejdříve limitu výrazu v odmocnině:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x-\frac{1}{x}}{3x^2+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3})}{x^2(3+\frac{3}{x^2})} \stackrel{\text{AL}}{=} \frac{1}{3}.$$

Nyní použijeme větu o limitě složené funkce pro $f(y) = \sqrt{y}$ a $g(x) = \frac{x^2-2x-\frac{1}{x}}{3x^2+3}$. Již jsme spočetli, že $\lim_{x\to\infty} g(x) = \frac{1}{3}$, a tedy ze spojitosti funkce f v bodě $\frac{1}{3}$ dostáváme $\lim\limits_{y\to\frac{1}{3}} f(y) = \sqrt{\frac{1}{3}}$, což je náš výsledek.

Příklad 2 (a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x^2}{x^2} \stackrel{\text{AL}}{=} 3\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x^2}{3x^2} = (*)$$

Použijeme VOLSF pro $f(y) = \sin(y)/y$ a $g(x) = 3x^2$. Zřejmě $\lim_{x\to 0} 3x^2 = 0$. Navíc pro $x \neq 0$ platí $3x^2 \neq 0$, a tedy máme ověřen předpoklad (P). Platí tedy

$$(*) = 3\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 3\cdot 1 = 3.$$

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 2 (b)

Funkce $\sin x$ je omezená a platí $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, a tedy $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Příklad 2 (c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{1-\cos 4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{16}\frac{1}{\frac{1-\cos 4x^2}{(4x^2)^2}} \stackrel{\text{AL}}{=} \frac{1}{16}\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x^2}{(4x^2)^2}} = (*)$$

Použijeme VOLSF pro $f(y) = \frac{1-\cos y}{y^2}$ a $g(x) = 4x^2$. Zřejmě $\lim_{x\to 0} 4x^2 = 0$. Navíc pro $x \neq 0$ platí $4x^2 \neq 0$, a tedy máme ověřen předpoklad (P). Platí tedy

$$(*) = \frac{1}{16}\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y^2}} = \frac{1}{16}\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}.$$

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 2 (d)

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{2x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{2}\cos\sqrt{x}} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \overset{\text{AL}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x\to 0+} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = (*)$$

Použijeme VOLSF pro $f(y) = \sin(y)/y$ a $g(x) = \sqrt{x}$. Zřejmě $\lim_{x\to 0+}\sqrt{x} = 0$. Navíc pro $x > 0$ platí $\sqrt{x} > 0$ zprava, a tedy máme ověřen předpoklad (P). Platí tedy

$$(*) = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{y\to 0+} \frac{\sin\sqrt{y}}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 2 (e)

$$\lim_{x\to 0} = \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{x^2} \frac{x^2}{1-\cos x} \overset{\text{AL, ZL}}{=} 2\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{x^2} = 2\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{1-\cos x^2}{(x^2)^2}} = (*)$$

Nyní spočteme

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{(x^2)^2}.$$

Použijeme VOLSF pro $f(y) = \frac{1-\cos y}{y^2}$ a $g(x) = x^2$. Zřejmě $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$. Navíc pro $x \neq 0$ platí $x^2 \neq 0$, a tedy máme ověřen předpoklad (P). Platí tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{(x^2)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y^2} = \frac{1}{2}.$$

Znovu použijeme VOLSF, tentokrát pro $f(y) = \sqrt{y}$ a $g(x) = \frac{1-\cos x^2}{(x^2)^2}$. Výše jsme spočetli $\lim_{x\to 0} g(x) = 1/2$, navíc $f(y) = \sqrt{y}$ je v $y = 1/2$ spojitá, tedy máme ověřen předpoklad (S). Platí tedy

$$(*) = 2\lim_{y\to\frac{1}{2}} \sqrt{y} = \sqrt{2}.$$

Příklad 2 (f)

Z AL a známých limit máme $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1/1 = 1$. Použijeme VOLSF pro $f(y) = \log y$ a $g(x) = \frac{x}{\sin x}$. Výše jsme spočetli $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$, navíc $f(y) = \log y$ je v $y = 1$ spojitá, tedy máme ověřen předpoklad (S). Platí tedy

$$\lim_{x\to 0} \log\left(\frac{x}{\sin x}\right) = \lim_{y\to 1} \log y = 0.$$

Příklad 2 (g)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x - \sin 3x}{\sin x} \overset{\text{AL}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sin x} - \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} 4\frac{\sin 4x}{4x}\frac{x}{\sin x} - \lim_{x\to 0} 3\frac{\sin 3x}{3x}\frac{x}{\sin x} = 4 - 3 = 1.$$

Obě limity spočteme snadno pomocí VOLSF a AL (detailní výpočet přenecháváme čtenáři). Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 2 (h)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\overset{\text{AL, spoj}}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\overset{\text{AL}}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}$$

Příklad 2 (i) Použijeme VOLSF pro $f(y)=\frac{\log y}{y-1}$ a $g(x)=x+1$. Zřejmě $\lim_{x\to 0}x+1=1$. Navíc pro $x\neq 0$ platí $x+1\neq 1$, a tedy máme ověřen předpoklad (P). Platí tedy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{y\to 1}\frac{\log y}{y-1}=1.$$

Příklad 2 (j) Použijeme VOLSF pro $f(y)=\frac{2y^2+y-1}{2y^2-3y+1}$ a $g(x)=\sin x$. Zřejmě $\lim_{x\to\pi/6}\sin x=1/2$. Navíc pro $x\in P(\pi/6,1/42)$ platí $\sin x\neq 1/2$, a tedy máme ověřen předpoklad (P). Spočteme

$$\lim_{y\to\frac{1}{2}}\frac{2y^2+y-1}{2y^2-3y+1}=\lim_{y\to\frac{1}{2}}\frac{(2y-1)(y+1)}{(2y-1)(y-1)}=\lim_{y\to\frac{1}{2}}\frac{y+1}{y-1}=-3.$$

Z VOLSF máme

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}=\lim_{y\to\frac{1}{2}}\frac{2y^2+y-1}{2y^2-3y+1}=-3.$$

Příklad 2 (k)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)}{\log(1-x^2)}&=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)}{(1+x^2)-1}\cdot\frac{(1+x^2)-1}{(1-x^2)-1}\cdot\frac{(1-x^2)-1}{\log(1-x^2)}\\&\overset{\text{AL}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)}{(1+x^2)-1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)-1}{(1-x^2)-1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(1-x^2)-1}{\log(1-x^2)}=(I)\cdot(II)\cdot(III)=(*)\end{aligned}$$

Snadno spočteme $(II)=-1$. Dále spočteme (I). Použijeme VOLSF pro $f(y)=\frac{\log y}{y-1}$ a $g(x)=1+x^2$. Zřejmě $\lim_{x\to 0}1+x^2=1$. Navíc pro $x\neq 0$ platí $1+x^2\neq 1$, a tedy máme ověřen předpoklad (P). Spočteme

$$(I)=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)}{(1+x^2)-1}=\lim_{y\to 1}\frac{\log y}{y-1}=1.$$

Obdobně se spočte $(III)=1$, a tedy

$$(*)=1\cdot(-1)\cdot 1=-1.$$

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 2 (l)

$$\lim_{x\to\infty}x\log\left(1-\frac{2}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(1-\frac{2}{x^2}-1\right)\frac{\log\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}{1-\frac{2}{x^2}-1}\overset{\text{AL}}{=}\lim_{x\to\infty}-\frac{2}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}{1-\frac{2}{x^2}-1}=(*)$$

Na druhou limitu použijeme VOLSF pro $f(y)=\frac{\log y}{y-1}$ a $g(x)=1-2/x^2$. Platí $\lim_{x\to\infty}1-2/x^2=1$. Navíc pro $x\in(0,\infty)$ platí $1-2/x^2\neq 1$, a tedy máme ověřen předpoklad (P).

$$(*)=0\cdot\lim_{y\to 1}\frac{\log y}{y-1}=0\cdot 1=0.$$

Pozor! Nesatčí přestat počítat ve chvíli, kdy spočteme, že první limita je rovna 0 a prohlásit, že cokoliv krát 0 je 0! To platí pro reálná čísla, my ale pracujeme na rozšířené reálné ose, která obsahuje nekonečno. Musíme tedy dopočítat, že druhá limita je reálné číslo. Až pak víme, že výsledek je definovaný (a tedy zároveň ověříme předpoklady AL).

Příklad 2 (m)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(2+e^{3x})}{\log(3+e^{2x})}$$

Příklad 2 (n)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\log(1+3^x)}{\log(1+2^x)} \overset{\text{AL}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\log(1+3^x)}{3^x}}{\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\log(1+2^x)}{2^x}} \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{3^x}{2^x} \overset{\text{VOLSF}}{=} \frac{1}{1} \cdot 0 = 0$$

Pro čitatele použijeme VOLSF pro $f(y) = \log(1+y)/y$ a $g(x) = 3^x$. Zřejmě $\lim_{x\to-\infty} 3^x = 0$. Pro jmenovatele použijeme VOLSF pro $f(y) = \log(1+y)/y$ a $g(x) = 2^x$. Zřejmě $\lim_{x\to-\infty} 2^x = 0$. Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 2 (o)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(1+3^x)}{\log(1+2^x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log 3^x + \log(3^{-x}+1)}{\log 2^x + \log(2^{-x}+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\log 3 + \log(3^{-x}+1)}{x\log 2 + \log(2^{-x}+1)} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\log 3 + \frac{1}{x}\log(3^{-x}+1)}{\log 2 + \frac{1}{x}\log(2^{-x}+1)} \overset{\text{AL}}{=} \frac{\log 3}{\log 2}$$

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 2 (p)

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{\log\left(1-\frac{2}{x}\right)\cdot x} \overset{\text{VOLSF}}{=} e^{-2}$$

Kde poslednslední rovnost získáme úpravou vnitřní funkce a použití VOLSF (S):

$$\lim_{x\to\infty} \log\left(1-\frac{2}{x}\right)\cdot x = \lim_{x\to\infty} -2 \cdot \frac{\log\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\frac{-2}{x}} \overset{\text{VOLSF+VOAL+známá lim.}}{=} -2$$

V poslední rovnosti bereme VOLSF $g(x) = \frac{-2}{x}$ a $f(y) = \frac{\log(1-y)}{y}$. Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 2 (q)

$$\lim_{x\to1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = \lim_{x\to1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-x}{(1-x)\cdot(1+\sqrt{x})}} = \lim_{x\to1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}} \overset{\text{spoj.}}{=} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Příklad 2 (r)

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\log\left(\frac{1+x}{2+x}\right)\cdot\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} \overset{\text{VOLSF}}{=} e^0 = 1$$

Kde VOLSF (S) použijeme na vnitřní funkci exponentu následovně:

$$\lim_{x\to\infty} \log\left(\frac{1+x}{2+x}\right)\cdot\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x\to\infty} \log\left(\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{2}{x}+1}\right)\cdot\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}-1} \overset{\text{spoj. + AL}}{=} \log 1 \cdot 0 = 0.$$

Příklad 2 (s)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\log\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)\cdot\frac{x^3}{1-x}}\overset{\text{VOLSF}}{=}e^{-\infty}=0$$

Kde VOLSF (S) použijeme na vnitřní funkci exponentu následovně:

$$\lim_{x\to\infty}\log\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)\cdot\frac{x^3}{1-x}=\lim_{x\to\infty}\log\left(\frac{3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)\cdot\frac{x^2}{\frac{1}{x}-1}\overset{\text{AL}}{=}-\infty.$$

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 2 (t)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\tan\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\tan 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}e^{\left[\tan\log\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]\cdot\tan 2x}\overset{\text{VOLSF}}{=}e^{-\infty}=0$$

Kde VOLSF (S) použijeme na vnitřní funkci exponentu následovně:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\tan\log\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]\cdot\tan 2x\overset{\text{AL+spoj.}}{=}-\infty.$$

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 2 (u)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log x+1}{\log x}\right)^{\log x}$$

Použijeme substituci $y=\log x$:

$$\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y+1}{y}\right)^{y}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\overset{\text{odvozená limita}}{=}e.$$

Tedy i

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log x+1}{\log x}\right)^{\log x}=e.$$

Příklad 2 (v)

$$\lim_{x\to0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to0}e^{\log\left(1+x^2\right)\cdot\frac{1}{\sin^2 x}}\overset{\text{VOLSF}}{=}e^1=e$$

Kde VOLSF (S) použijeme na vnitřní funkci exponentu následovně:

$$\lim_{x\to0}\log\left(1+x^2\right)\cdot\frac{1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\log\left[\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}\right]\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\overset{\text{AL}}{=}\left(\lim_{x\to0}\log\left[\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}\right]\right)\cdot1^2\overset{\text{VOLSF + odvozená limita}}{=}1$$

Zde použijeme VOLSF (S) na $f(y)=\log(y)$ a $g(x)=\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}$, neboť víme, že $\lim_{x\to0}g(x)=e$.
Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 2 (w)

$$\lim_{x\to0}(1+\tan x)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to0}e^{\log(1+\tan x)\cdot\frac{1}{\sin x}}\overset{\text{VOLSF}}{=}e^1=e$$

Kde VOLSF (S) použijeme na vnitřní funkci exponentu následovně:

$$\lim_{x\to 0} \log(1+\tan x)\cdot\frac{1}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\tan x)}{\tan x}\cdot\frac{\tan x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\tan x)}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos x} = \stackrel{\text{AL+VOLSF+známá lim +spoj.}}{=} 1\cdot 1 = 1$$

Zde použijeme VOLSF (S) na $f(y) = \frac{1+\log(y)}{y}$ a $g(x) = \tan x$, neboť víme, že $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$. Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 2 (x)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} \stackrel{\text{AL}}{=} \frac{\lim_{x\to 0}(1+\tan x)^{\frac{1}{\sin x}}}{\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}} = \frac{e}{e} = 1$$

Kde limita čitatele plyne z předchozího příkladu a limitu jmenovatele spočteme pomocí substituce $y = \sin x$ a odvozené limity:

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e$$

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 3 (a) Spočteme nejdříve limitu argumentu funkce arcsin:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-x}{1+x} = -1.$$

Nyní aplikujeme větu o limitě složené funkce pro $f(y) = \arcsin y$ a $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Již jsme spočítáli, že $\lim_{x\to\infty} g(x) = -1$, a tudíž ze spojitosti funkce arcsin v bodě -1 zprava dostáváme, že $\lim\limits_{y\to -1^+} f(y) = -\frac{\pi}{2}$ a to je náš výsledek.

Příklad 3 (b) Opět spočítáme nejdřív limitu argumentu:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x}-x = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} \stackrel{\text{AL}}{=} \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = (*).$$

Položme $f(y) = \sqrt{1+y}+1$ a $g(x) = \frac{1}{x}$. Pak $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, a tedy ze spojitosti funkce f v bodě 0 máme, že $\lim\limits_{y\to 0} f(y) = 2$. Z věty o limitě složené funkce jsme tedy dostali, že $(*) = \frac{1}{2}$. Funkce arccos je spojitá v bodě $\frac{1}{2}$, a tedy

$$\lim_{x\to\infty}\arccos(\sqrt{x^2+x}-x) = \lim_{y\to\frac{1}{2}}\arccos y = \frac{\pi}{3}.$$

Příklad 3 (c) Víme, že funkce $\arctan x \geq 1$ od jistého x_0 počínaje (neboť $\lim_{x\to\infty}\arctan x = \frac{\pi}{2} > 1$). Dále víme, že $\lim_{x\to\infty}\operatorname{arccot} x = 0$ a $\operatorname{arccot} x > 0$ pro každé $x\in\mathbb{R}$. Pro $x \geq x_0$ tedy platí odhad $\frac{1}{\operatorname{arccot} x} \leq \frac{\arctan x}{\operatorname{arccot} x}$. Výraz nalevo ale diverguje k $+\infty$ pro $x\to\infty$. Z věty o dvou policajtech tedy usoudíme, že $\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{\operatorname{arccot} x} = \infty$.

Příklad 3 (d) Upravíme

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{e^2-e^{2x}}}{\arccos x} = \lim_{x\to 1^-}\sqrt{\frac{e^2-e^{2x}}{\arccos^2 x}}$$

a soustředíme se na vnitřek odmocniny. Počítejme za věty o limitě složené funkce. Položme $f(y) = \frac{e^2-e^{2\cos y}}{y^2}$ a $g(x) = \arccos x$. Víme, že $\lim_{x\to 1^-} g(x) = 0$, a pro $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ platí, že $g(x) \neq 0$. Z podmínky (P) tedy dostáváme, že

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{e^2 - e^{2x}}{\arccos^2 x} = \lim_{y\to 0^+} \frac{e^2 - e^{2\cos y}}{y^2} = e^2 \lim_{y\to 0^+} \frac{1 - e^{2(\cos y - 1)}}{y^2}$$

$$= e^2 \lim_{y\to 0^+} \frac{e^{2(\cos y-1)} - 1}{2(\cos y - 1)} \cdot \frac{2(1-\cos y)}{y^2} \overset{\text{AL}}{=} e^2 \lim_{y\to 0^+} \frac{e^{2(\cos y-1)} - 1}{2(\cos y - 1)} \lim_{y\to 0^+} \frac{2(1-\cos y)}{y^2} = (*).$$

Druhá z limit je dvojnásobek známé limity s funkcí cosinus. Spočítáme $\lim\limits_{y\to 0^+} \frac{2(1-\cos y)}{y} = 1$. K první limitě uvažujme funkci $f(y) = \frac{e^y-1}{y}$ a $g(x) = 2(\cos x - 1)$. Pak $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$ a zároveň pro $x \in (0, \frac{1}{2})$ je $g(x) \neq 0$. Z podmínky (P) tudíž plyne, že

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{e^{2(\cos y-1)} - 1}{2(\cos y - 1)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Odtud máme, že

$$(*) = e^2.$$

Na závěr aplikujeme větu o limitě složené funkce ještě jednou, tentokrát pro $f(y) = \sqrt{y}$ a $g(x) = \frac{e^2-e^{2x}}{\arccos^2 x}$. Spočítali jsme, že $\lim_{x\to 1^-} g(x) = e^2$, a tudíž ze spojitosti f v bodě e^2 dostáváme

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{e^2 - e^{2x}}}{\arccos x} = \lim_{y\to e^2} f(y) = e.$$