9. cvičení - řešení

8. 12. 2022

Příklad 1 (a) Nechť $n \in \mathbb{Z}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^n} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x-(1-x)}{x^n \cdot (\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x^n \cdot (\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x^{n-1} \cdot (\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \overset{\text{VoAL}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{n-1}}$$

Dále platí $\lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \overset{\text{VoAL + spoj.}}{=} \frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = 1$.

Je-li $n-1=0$, čili $n=1$, pak $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{n-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1} = 1$.

Je-li $n-1>0$ a sudé, čili $n>1$ a liché, pak zlomek $\frac{1}{x^{n-1}}$ je kladný nezávisle na kladnosti x. Proto $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{n-1}} = \infty$ (neb $\frac{1}{+0} = \infty$).

Je-li $n-1>0$ a liché, čili $n>1$ a sudé, pak zlomek $\frac{1}{x^{n-1}}$ je kladný pro kladná x a záporný pro záporná x. Platí tedy $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x^{n-1}} = -\infty$ a $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^{n-1}} = \infty$. Tedy zadaná limita nekonverguje.

Je-li $n-1<0$, čili $n<1$, pak $\frac{1}{x^{n-1}} = x^{1-n}$, kde $1-n>0$. Proto $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{n-1}} = 0$.

Závěr:

$n \in \mathbb{Z}$	$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^n}$
>1, liché	∞
>1, sudé	$\nexists$
1	1
<1	0

Příklad 1 (b)

Nechť $n \in \mathbb{Z}$.

Použijeme vzorec $A^n - B^n$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2+7}-\sqrt[3]{x^3+7}}{(x-1)^n} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2+7}-\sqrt[3]{x^3+7}}{(x-1)^n} \cdot \frac{(\sqrt[3]{x^2+7})^2+\sqrt[3]{x^2+7}\sqrt[3]{x^3+7}+(\sqrt[3]{x^3+7})^2}{(\sqrt[3]{x^2+7})^2+\sqrt[3]{x^2+7}\sqrt[3]{x^3+7}+(\sqrt[3]{x^3+7})^2} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+7-(x^3+7)}{(x-1)^n \left((\sqrt[3]{x^2+7})^2+\sqrt[3]{x^2+7}\sqrt[3]{x^3+7}+(\sqrt[3]{x^3+7})^2 \right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-x^2(x-1)}{(x-1)^n \cdot x^2 \left(\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{7}{x^3}}\right)^2 + \sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{7}{x^3}}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} + \left(\sqrt[3]{1+\frac{7}{x^3}}\right)^2 \right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-1}{(x-1)^{n-1} \left(\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{7}{x^3}}\right)^2 + \sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{7}{x^3}}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} + \left(\sqrt[3]{1+\frac{7}{x^3}}\right)^2 \right)} =$$

$$\overset{\text{VoAL}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-1}{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{7}{x^3}}\right)^2 + \sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{7}{x^3}}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} + \left(\sqrt[3]{1+\frac{7}{x^3}}\right)^2} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^{n-1}}$$

Platí

$$\lim_{x\to1}\frac{-1}{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{7}{x^3}}\right)^2+\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{7}{x^3}}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}+\left(\sqrt[3]{1+\frac{7}{x^3}}\right)^2}=$$

$$\overset{\text{VoAL + spoj.}}{=}\frac{-1}{\lim_{x\to1}\frac{-1}{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{1}+\frac{7}{1^3}}\right)^2+\sqrt[3]{\frac{1}{1}+\frac{7}{1^3}}\sqrt[3]{1+\frac{1}{1^3}}+\left(\sqrt[3]{1+\frac{7}{1^3}}\right)^2}}=\frac{-1}{12}.$$

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^{n-1}}\overset{\text{VOLSF (P)}}{=}\lim_{y\to0}\frac{1}{y^{n-1}}$$

V závislosti na kladnosti a sudosti čísla $n-1$ limita $\lim_{y\to0}\frac{1}{y^{n-1}}$ nekonverguje, či konverguje k nekonečnu, nebo k 0, nebo k 1.

Závěr:

$n\in\mathbb{Z}$	$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2+7}-\sqrt[3]{x^3+7}}{(x-1)^n}$
>1, liché	$-\infty$
>1, sudé	$\nexists$
1	$\frac{-1}{12}$
<1	0

Příklad 1 (c) Nechť $a\in\mathbb{R}$.
Použijeme vzorec z přednášky: $\sin x-\sin a=2\cdot\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)$. Pak platí následující.

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\overset{\text{vzorec}}{=}\lim_{x\to a}\frac{\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}\overset{\text{VoAL}}{=}\lim_{x\to a}\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\lim_{x\to a}\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}=$$

$$\overset{\text{spoj. + ZL}}{=}\cos\left(\frac{a+a}{2}\right)\cdot1=\cos a$$

Výpočet platí pro libovolné $a\in\mathbb{R}$.

Příklad 1 (d)
Nechť $m,n\in\mathbb{N}$. Proveďme nejdříve úpravu: $\sin(mx)=\sin(mx-m\pi+m\pi)=\sin(m(x-\pi)+m\pi)\overset{\text{součtový vzorec}}{=}\sin(m(x-\pi))\cos(m\pi)+\cos(m(x-\pi))\sin(m\pi)$. Přičemž $\cos(m\pi)=(-1)^m$ a $\sin(m\pi)=0$, neb $m\in\mathbb{N}$. Proto platí $\sin(mx)=(-1)^m\sin(m(x-\pi))$ a analogicky $\sin(nx)=(-1)^n\sin(n(x-\pi))$.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}\overset{\text{úprava}}{=}\lim_{x\to\pi}\frac{(-1)^m\sin(m(x-\pi))}{(-1)^n\sin(n(x-\pi))}\overset{\text{VoAL}}{=}\frac{(-1)^m}{(-1)^n}\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(m(x-\pi))}{m(x-\pi)}\frac{m(x-\pi)}{n(x-\pi)}\frac{n(x-\pi)}{\sin(n(x-\pi))}=$$

$$\overset{\text{VoAL + VOLSF (P) + ZL}}{=}(-1)^{m-n}\cdot1\cdot\frac{m}{n\cdot}1=(-1)^{m-n}\frac{m}{n}$$

Příklad 1 (e)
Nechť $a\in\mathbb{R},a>0$.
Je-li $a=1$, pak $\frac{a^x-1}{x-a}=\frac{0}{x-a}$, a proto $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=0$.
Pro $a\neq1$ užijeme vzorec $y=e^{\log(y)}$ pro $y>0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\log(a)}-1}{x\log(a)}\cdot\log(a)\overset{\text{VoAL + VOLSF (P)}}{=}\log(a)\cdot\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\overset{\text{ZL}}{=}\log(a)\cdot 1=\log(a)$$

Příklad 1 (f) Nechť $a\in\mathbb{R}$.

Je-li $a=0$, pak $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}1^x=1$.

Pro $a\neq 0$ použijeme vzorec $a=e^{\log(a)}$ pro $a>0$. Je proto třeba nejdříve ověřit, že $\frac{x+a}{x-a}>0$. Je-li $a>0$, pak kýžená nerovnost nastane v případě, že $x\in(-\infty,-a)\cup(a,\infty)$. To je splněno pro dostatečně velká x a jelikož $x\to\infty$, můžeme předpokládat, že $\frac{x+a}{x-a}>0$. Podobně pro $a<0$ dostáváme, že stačí, aby $x>-a$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x\overset{\text{vzorec}}{=}\lim_{x\to\infty}e^{x\log\left(\frac{x+a}{x-a}\right)}$$

Spočítejme nyní $\lim_{x\to\infty}x\log\left(\frac{x+a}{x-a}\right)$.

$$\lim_{x\to\infty}x\log\left(\frac{x+a}{x-a}\right)=\lim_{x\to\infty}x\log\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)\cdot\frac{\frac{2a}{x-a}}{\frac{2a}{x-a}}\overset{\text{VoAL}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2ax}{x-a}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)}{\frac{2a}{x-a}}=$$
$$\overset{\text{VOLSF (P}}{=}2a\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}\overset{\text{ZL}}{=}2a\cdot 1=2a$$

Mohli jsme použít VOLSF, neb $\lim_{x\to\infty}\frac{2a}{x-a}=0$.

Pltí tedy následující.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x\overset{\text{vzorec}}{=}\lim_{x\to\infty}e^{x\log\left(\frac{x+a}{x-a}\right)}\overset{\text{VOLSF (S)}}{=}e^{\lim_{x\to\infty}x\log\left(\frac{x+a}{x-a}\right)}=e^{2a}$$

Příklad 2 (a) Ukážeme, že limita neexistuje. K tomu uvážíme posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ a $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ definované předpisem $x_n=\frac{1}{2n},n\in\mathbb{N}$ a $y_n=\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}+2n\pi},n\in\mathbb{N}$. Pak $x_n\to 0$ a $y_n\to 0$. Dále spočítáme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{x_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sin(2n\pi)=\lim_{n\to\infty}0=0$$

a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{y_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Z Heineho věty nyní vyvodíme, že $\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{x})$ neexistuje, protože jsme nalezli dvě posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ konvergující k nule takové, že $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{x_n})\neq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{y_n})$.

Příklad 2 (b) Použijeme Heineho větu na posloupnost $x_n = n \to \infty$. Počítejme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x+\cos\frac{3}{x}}}{\sqrt[6]{x^2+\sin\frac{2}{x}} - \sqrt[3]{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x+1-x-\cos\left(\frac{3}{x}\right)}{\sqrt{x^2+\sin\left(\frac{2}{x}\right)} - x} \cdot \frac{(x^2+\sin\left(\frac{2}{x}\right))^{\frac{2}{6}} + (x^2+\sin\left(\frac{2}{x}\right))^{\frac{1}{6}} x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}{(x+1)^{\frac{2}{3}} + (x+1)^{\frac{1}{3}}(x+\cos\left(\frac{3}{x}\right))^{\frac{1}{3}} + (x+\cos\left(\frac{3}{x}\right))^{\frac{2}{3}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{3}{x}\right)}{x^2+\sin\left(\frac{2}{x}\right) - x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+\sin\left(\frac{2}{x}\right)} + x}{1} \cdot \frac{x^{\frac{4}{6}}\left(\left(1+\frac{\sin(\frac{2}{x})}{x^2}\right)^{\frac{2}{6}} + \left(1+\frac{\sin(\frac{2}{x})}{x^2}\right)^{\frac{1}{6}} + 1\right)}{x^{\frac{2}{3}}(1+\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}} + (1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{\cos(\frac{3}{x})}{x}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1+\frac{\cos(\frac{3}{x})}{x}\right)^{\frac{2}{3}}} =$$

$$\overset{\text{AL+VoLSF(P)}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{3}{x}\right)}{\sin\left(\frac{2}{x}\right)} \cdot \frac{x\left(\sqrt{1+\frac{\sin(\frac{2}{x})}{x^2}} + 1\right)}{1} \cdot \frac{3}{3} =$$

$$\overset{\text{AL}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1-\cos(\frac{3}{x})}{\left(\frac{3}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^2 \cdot \frac{\frac{2}{x}}{\sin(\frac{2}{x})} \cdot \frac{x}{2} \cdot x \cdot \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{\sin(\frac{2}{x})}{x^2}} + 1\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1-\cos(\frac{3}{x})}{\left(\frac{3}{x}\right)^2} \cdot 9 \cdot \frac{\frac{2}{x}}{\sin(\frac{2}{x})} \cdot \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{\sin(\frac{2}{x})}{x^2}} + 1\right) =$$

$$\overset{\text{AL+VoLSF (P) + spoj.}}{=} \lim_{y\to 0^+}\left(\frac{1-\cos y}{y^2}\right) \cdot 9 \cdot \lim_{y\to 0^+}\left(\frac{y}{\sin y}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \overset{\text{ZL}}{=} \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 1 = \frac{9}{2}.$$

Přičemž limitu výrazu $1 + \frac{\sin(\frac{2}{x})}{x^2}$ jsme počítali následujícím způsobem.

$$\lim_{x\to\infty} 1 + \frac{\sin(\frac{2}{x})}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{\sin(\frac{2}{x})}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{\sin(\frac{2}{x})}{\frac{2}{x}} \cdot \frac{2}{x^3} =$$

$$\overset{\text{VoAL + VOLSF (P)}}{=} 1 + \lim_{y\to y} \frac{\sin(y)}{y} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^3} = 1 + 1 \cdot 0 = 1$$

Z Heineho věty je tedy i původní limita pro n rovna $\frac{9}{2}$.

Příklad 2 (c) Ukážeme, že limita neexistuje. Uvažme posloupnosti $x_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ a $y_n = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$. Pak x_n konverguje k $\frac{\pi}{2}$ zleva a y_n konverguje k $\frac{\pi}{2}$ zprava. Vypočteme

$$\lim_{n\to\infty} \tan x_n = \lim_{n\to\infty} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right) = \infty$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \tan y_n = \lim_{n\to\infty} \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right) = -\infty.$$

Z Heineho věty tudíž dostáváme, že $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x$ neexistuje.

Příklad 2 (d) Ukážeme, že limita neexistuje. Uvažujme posloupnosti $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi}, n \in \mathbb{N}$ a $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{4}+n\pi}, n \in \mathbb{N}$. Pak x_n a y_n obě konvergují k 0. Spočítáme

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{cotan}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{cotan}\left(\frac{1}{y_n}\right) = \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Z Heineho věty dostáváme, že $\lim_{x\to 0} \operatorname{cotan}(\frac{1}{x})$ neexistuje.

Příklad 2 (e) Použijeme Heineho větu pro $x_n = n \to \infty$. Počítáme tedy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\arcsin\left(\sqrt{x^2+\sin^2 x} - \sqrt{x^2-\cos^2 x}\right)}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}.$$

Nejdříve upravíme

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} \frac{\arcsin\left(\sqrt{x^2+\sin^2 x} - \sqrt{x^2-\cos^2 x}\right)}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+\sin^2 x} - \sqrt{x^2-\cos^2 x}}{\sqrt{x^2+\sin^2 x} - \sqrt{x^2-\cos^2 x}} = \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\arcsin\left(\sqrt{x^2+\sin^2 x} - \sqrt{x^2-\cos^2 x}\right)}{\sqrt{x^2+\sin^2 x} - \sqrt{x^2-\cos^2 x}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+\sin^2 x} - \sqrt{x^2-\cos^2 x}}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}} = \\
&\overset{\text{AL}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\arcsin\left(\sqrt{x^2+\sin^2 x} - \sqrt{x^2-\cos^2 x}\right)}{\sqrt{x^2+\sin^2 x} - \sqrt{x^2-\cos^2 x}} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+\sin^2 x} - \sqrt{x^2-\cos^2 x}}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}$$

Počítáme tedy dvě limity. Spočítejme nejdříve limitu vnitřní funkce první limity:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+\sin^2 x} - \sqrt{x^2-\cos^2 x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sqrt{x^2+\sin^2 x} + \sqrt{x^2-\cos^2 x}} = 0.$$

Označme $g(x) = \sqrt{x^2+\sin^2 x} - \sqrt{x^2-\cos^2 x}$ a $f(y) = \frac{\arcsin y}{y}$. Již jsme spočetli $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Snadno ověříme, že pro $x \in (1,\infty)$ je $g(x)$ definována a kladná (speciálně $g(x) \neq 0$), a tedy můžeme použít VoLSF(P). Dostáváme, že

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\arcsin\left(\sqrt{x^2+\sin^2 x} - \sqrt{x^2-\cos^2 x}\right)}{\sqrt{x^2+\sin^2 x} - \sqrt{x^2-\cos^2 x}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\arcsin y}{y}.$$

Položme nyní $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ a $g(y) = \arcsin y$. Pak $\lim\limits_{y\to 0^+} g(y) = 0$ a g je prostá. Z VoLSF(P) tudíž dostáváme, že

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\arcsin y}{y} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x} \overset{\text{AL}}{=} \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}} \overset{\text{ZL}}{=} 1.$$

Dále spočítáme druhou limitu:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+\sin^2 x}-\sqrt{x^2-\cos^2 x}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\sin^2 x - x^2+\cos^2 x}{x^2+1-x^2+1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}+\sqrt{x^2-\cos^2 x}} =$$
$$\overset{\text{AL}}{=} \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{\sin^2 x}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{\cos^2 x}{x^2}}\right)} \overset{\text{AL+VoLSF (P)}}{=} \frac{1}{2}\cdot\frac{1+1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Příklad 2 (f) Položme $f(y)=\sqrt{\tan^2 y+1}(\frac{\pi}{2}-y)$ a $g(x)=\arctan x$. Pak $\lim_{x\to\infty} g(x) = \frac{\pi}{2}$ a zároveň $g(x)\neq\frac{\pi}{2}$ na $(1,\infty)$. Je splněna podmínka (P) VoLSF. Dostáváme

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right) = \lim_{x\to\infty} f(g(x)) = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}^-} \sqrt{\tan^2 y+1}\left(\frac{\pi}{2}-y\right) =$$
$$= \lim_{y\to\frac{\pi}{2}^-} \sqrt{(\tan^2 y+1)\left(\frac{\pi}{2}-y\right)^2}$$

Nyní se podíváme na limitu vnitřní funkce. Počítejme

$$\lim_{y\to\frac{\pi}{2}^-} (\tan^2 y+1)\left(\frac{\pi}{2}-y\right)^2 = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin^2 y+\cos^2 y}{\cos^2 y}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)^2 = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2}-y)}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)^2.$$

Opět použijeme VoLSF. Položíme $f(x)=\frac{x^2}{\sin^2 x}$ a $g(y)=\frac{\pi}{2}-y$. Pak $\lim_{y\to\frac{\pi}{2}^-} g(y)=0$ a g je prostá. Dle VoLSF(P) tudíž dostáváme

$$\lim_{y\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2}-y)}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)^2 = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}^-} f(g(y)) = \lim_{x\to 0^+} f(x) =$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\sin^2 x} \overset{\text{AL}}{=} \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2}} \overset{\text{AL}}{=} \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}} \overset{\text{ZL}}{=} \frac{1}{1\cdot 1} = 1.$$

Příklad 2 (g) Spočítáme prvně limitu vnitřní funkce:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} + \frac{\sin x}{2x} \overset{\text{AL+0 krát omezená}}{=} 0.$$

Označme $f(y)=\log y$ a $g(x)=\frac{1}{x}+\frac{\sin x}{2x}$. Právě jsme spočítali, že $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$. Zároveň vidíme, že $g(x)\neq 0$ na $(1,\infty)$. Z VoLSF(P) dostáváme

$$\lim_{x\to\infty} f(g(x)) = \lim_{y\to 0^+} \log y = -\infty.$$

Příklad 3 (a) Budeme chtít využít známých limit a VOLSF.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\tan x)}{\arctan(\arcsin x)} \cdot \frac{\tan x}{\tan x} \cdot \frac{\arcsin x}{\arcsin x} \cdot \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan x} \cdot \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{\arcsin x}{\arctan(\arcsin x)} \cdot \frac{x}{\arcsin x} \overset{\text{VOAL}}{=} 1.$$

Poslední rovnost platí, protože:

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan x} \overset{\text{VOLSF}}{=} 1$, kde $g(x) = \tan x$, $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ (ze spojitosti) a $f(y) = \frac{\sin y}{y}$, $\lim_{y\to 0} f(y) = 1$ (známá limita) a platí podmínka (P).
- $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$, víme z předchozích cvičení, neb se jedná o limitu odvozenou ze známé limity.
- $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\arctan(\arcsin x)} \overset{\text{VOLSF}}{=} 1$, kde $g(x) = \arcsin x$, $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ (ze spojitosti) a $f(y) = \frac{y}{\arctan y}$, $\lim_{y\to 0} f(y) = 1$ (odvozené od známé limity) a platí podmínka (P).
- $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1$, víme z předchozích cvičení, neb se jedná o limitu odvozenou ze známé limity.

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 3 (b) Budeme chtít využít známých limit a VOLSF.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\arctan x)}{x^2} \cdot \frac{\arctan x}{\arctan x} \cdot \frac{\arctan x}{\arctan x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\arctan x)}{(\arctan x)^2} \cdot \frac{(\arctan x)^2}{x^2} \overset{\text{VOAL}}{=} \frac{1}{2}.$$

Poslední rovnost platí, protože:

- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\arctan x)}{(\arctan x)^2} \overset{\text{VOLSF}}{=} \frac{1}{2}$, kde $g(x) = \arctan x$, $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ (ze spojitosti) a $f(y) = \frac{1-\cos y}{y^2}$, $\lim_{y\to 0} f(y) = \frac{1}{2}$ (odvozeno od známé limity) a platí podmínka (P).
- $\lim_{x\to 0} \frac{(\arctan x)^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} \cdot \frac{\arctan x}{x} \overset{\text{VOAL}}{=} 1$, víme z předchozích cvičení, neb se jedná o limitu odvozenou ze známé limity.

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 3 (c)

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{5}{2}} \arcsin\left(\sqrt{x^5+1} - \sqrt{x^5-1} \cdot \frac{\sqrt{x^5+1}+\sqrt{x^5-1}}{\sqrt{x^5+1}+\sqrt{x^5-1}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^{\frac{5}{2}} \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{x^5+1}+\sqrt{x^5-1}}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x^5+1}+\sqrt{x^5-1}} \cdot \frac{\sqrt{x^5+1}+\sqrt{x^5-1}}{2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{x^5+1}+\sqrt{x^5-1}}\right)}{\frac{2}{\sqrt{x^5+1}+\sqrt{x^5-1}}} \cdot \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x^5+1}+\sqrt{x^5-1}} =$$

$$\overset{\text{VOAL}}{=} 1 \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^5}} + \sqrt{1-\frac{1}{x^5}}} \overset{\text{VOAL+spoj.}}{=} \frac{2}{2} = 1.$$

První VOAL rovnost platí, protože:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{x^5+1}+\sqrt{x^5-1}}\right)}{\frac{2}{\sqrt{x^5+1}+\sqrt{x^5-1}}} \overset{\text{VOLSF}}{=} 1,$$

kde $g(x) = \frac{2}{\sqrt{x^5+1}+\sqrt{x^5-1}}$, $\lim_{x\to\infty} g(x) \overset{\text{VOAL+spoj.}}{=} 0$ a $f(y) = \frac{\arcsin y}{y}$, $\lim_{y\to 0} f(y) = 1$ (známá limita) a platí podmínka (P). Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 3 (d) Budeme chtít využít známých limit a VOLSF.

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} (4x^2 - 9\pi^2)\frac{\cos x}{1+\sin x} \cdot \frac{(x-\frac{3\pi}{2})^2}{(x-\frac{3\pi}{2})^2} = \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} \frac{4x^2-9\pi^2}{x-\frac{3\pi}{2}} \cdot \frac{\cos x}{x-\frac{3\pi}{2}} \cdot \frac{(x-\frac{3\pi}{2})^2}{1+\sin x} \overset{\text{VOAL}}{=} 24\pi.$$

Poslední rovnost platí, protože:

- $\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} \frac{4x^2-9\pi^2}{x-\frac{3\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} \frac{(2x-3\pi)(2x+3\pi)}{x-\frac{3\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} (2x+3\pi)\cdot 2 = 12\pi$ (ze spojitosti).
- $\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{3\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin(x+\frac{\pi}{2})}{x-\frac{3\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin(x-\frac{3\pi}{2})}{x-\frac{3\pi}{2}} \overset{\text{VOLSF}}{=} 1$, kde $g(x) = x - \frac{3\pi}{2}$, $\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} g(x) = 0$ (ze spojitosti) a $f(y) = \frac{\sin y}{y}$, $\lim_{y\to 0} f(y) = 1$ (známá limita) a platí podmínka (P).
- $\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} \frac{(x-\frac{3\pi}{2})^2}{1+\sin x} = \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} \frac{(x-\frac{3\pi}{2})^2}{1+\cos(x-\frac{\pi}{2})} = \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} \frac{(x-\frac{3\pi}{2})^2}{1-\cos(x-\frac{3\pi}{2})}$, kde $g(x) = x - \frac{3\pi}{2}$, $\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} g(x) = 0$ (ze spojitosti) a $f(y) = \frac{y^2}{1-\cos y}$, $\lim_{y\to 0} f(y) = 2$ (odvozeno od známé limity) a platí podmínka (P).

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 3 (e) Budeme chtít využít známých limit a VOLSF.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan((\sqrt{x^2+\sin^2 x} - \sqrt{x^2-\cos^2 x}) \cdot \frac{\sqrt{x^2+\sin^2 x}+\sqrt{x^2-\cos^2 x}}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}+\sqrt{x^2-\cos^2 x}})}{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan(\frac{1}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}+\sqrt{x^2-\cos^2 x}})}{\frac{1}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}+\sqrt{x^2-\cos^2 x}}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}+\sqrt{x^2-\cos^2 x}}}{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan(\frac{1}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}+\sqrt{x^2-\cos^2 x}})}{\frac{1}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}+\sqrt{x^2-\cos^2 x}}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}+\sqrt{x^2-\cos^2 x}} \overset{\text{VOAL}}{=} 1.$$

Poslední rovnost platí, protože:

- $\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan(\frac{1}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}+\sqrt{x^2-\cos^2 x}})}{\frac{1}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}+\sqrt{x^2-\cos^2 x}}} \overset{\text{VOLSF+spoj.}}{=} 1$, kde $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}+\sqrt{x^2-\cos^2 x}}$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ a $f(y) = \frac{\arctan y}{y}$, $\lim_{y\to 0} f(y) = 1$ (odvozeno od známé limity) a platí podmínka (P).
- $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}+\sqrt{x^2-\cos^2 x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{1+\frac{\sin^2 x}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{\cos^2 x}{x^2}}} \overset{\text{VOAL + spoj.+ omez.}}{=} \frac{2}{2} = 1.$

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 3 (f)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-1}{\log(\sqrt{1+x^2})} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\log(\sqrt{1+x^2})}\cdot\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{\cos(\sin x)-1}{\sin^2 x}\\ &\overset{\text{AL}}{=} \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}-1}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\left(-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{\sin^2 x}\right)\\ &= \frac{1}{1}\cdot 2\cdot 1^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1.\end{aligned}$$

Spočetli jsme

- první limitu pomocí VOLSF: $f(y)=\log(y)/(y-1)$, $g(x)=\sqrt{1+x^2}$, předpoklad (P),
- druhou limitu použitím vzorce a^2-b^2: $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}{1+x^2-1}$,
- třetí limitu jako známou limitu,
- čtvrtou limitu pomocí VOLSF: $f(y)=(1-\cos y)/y^2$, $g(x)=\sin x$, předpoklad (P).

Příklad 3 (g)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}\frac{(\sqrt{e})^{\sin x}-\cos(\sqrt{x})}{\log^2(1+\sqrt{x})} &= \lim_{x\to 0+}\left(\frac{\sqrt{x}}{\log(1+\sqrt{x})}\right)^2\cdot\left(\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}+\frac{e^{\frac12\sin x}-1}{\frac12\sin x}\cdot\frac{\frac12\sin x}{x}\right)\\ &\overset{\text{AL}}{=}\left(\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}}\right)^2\cdot\left(\lim_{x\to 0+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}+\lim_{x\to 0+}\frac{e^{\frac12\sin x}-1}{\frac12\sin x}\cdot\lim_{x\to 0+}\frac{\frac12\sin x}{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{1}\right)^2\cdot\left(\frac12+1\cdot\frac12\right) = 1.\end{aligned}$$

Spočetli jsme

- první limitu pomocí VOLSF: $f(y)=\log(1+y)/y$, $g(x)=\sqrt{x}$, předpoklad (P), a příkladu 7.3(i),
- druhou limitu pomocí VOLSF: $f(y)=(1-\cos y)/y^2$, $g(x)=\sqrt{x}$, předpoklad (P),
- třetí limitu pomocí VOLSF: $f(y)=(e^y-1)/y$, $g(x)=(\sin x)/2$, předpoklad (P),
- čtvrtou limitu pomocí AL a známé limity.

Příklad 3 (h) Značíme $\exp(x)=e^x$.

$$\lim_{x\to 0+}\left(1-\sqrt{\arcsin x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}} = \lim_{x\to 0+}\exp\left(\log\left(1-\sqrt{\arcsin x}\right)\frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}\right)$$

Spočteme

$$\lim_{x\to 0+} \log\left(1-\sqrt{\arcsin x}\right)\frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0+}\frac{\log\left(1-\sqrt{\arcsin x}\right)}{-\sqrt{\arcsin x}}\cdot\frac{-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{x}}\cdot\sqrt[4]{\frac{x^2}{1-\cos x}}$$

$$\overset{\text{AL}}{=}\left(\lim_{x\to 0+}\frac{\log\left(1-\sqrt{\arcsin x}\right)}{-\sqrt{\arcsin x}}\right)\cdot\frac{-1}{\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt{\frac{x}{\arcsin x}}}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt[4]{\frac{1-\cos x}{x^2}}} = 1\cdot\frac{-1}{1}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt[4]{1/2}}} = -\sqrt[4]{2}$$

Spočetli jsme

- první limitu pomocí VOLSF: $f(y)=\log(1+y)/y$, $g(x)=-\sqrt{\arcsin x}$, předpoklad (P), a příkladu 7.3(i); limitu $g(x)$ spočteme ze spojitosti,
- druhou limitu pomocí spojitosti odmocniny a VOLSF: $f(y)=(\sin y)/y$, $g(x)=\arcsin x$, předpoklad (P),
- třetí limitu pomocí spojitosti odmocniny a známé limity.

Díky spojitosti exponenciály se pak původní limita rovná $e^{-\sqrt[4]{2}}$.

Příklad 3 (i) Jako v předchozích případech stačí spočítat

$$\lim_{x\to 0}\log\left(2e^{\frac{4x}{x+1}}-1\right)\frac{x^2+1}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\log\left(2e^{\frac{4x}{x+1}}-1\right)}{2e^{\frac{4x}{x+1}}-2}\cdot\frac{2(e^{\frac{4x}{x+1}}-1)}{\frac{4x}{x+1}}\cdot\frac{4x}{x+1}\cdot\frac{x^2+1}{3x}$$

$$\overset{\text{AL}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(2e^{\frac{4x}{x+1}}-1\right)}{2e^{\frac{4x}{x+1}}-2}\cdot 2\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{4x}{x+1}}-1}{\frac{4x}{x+1}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4x}{x+1}\cdot\frac{x^2+1}{3x}$$

$$= 1\cdot(2\cdot 1)\cdot\frac{4}{3}$$

Spočetli jsme

- první limitu pomocí VOLSF: $f(y)=\log(y)/(y-1)$, $g(x)=2\exp(\frac{4x}{x+1})-1$, předpoklad (P),
- druhou limitu pomocí VOLSF: $f(y)=(e^y-1)/y$, $g(x)=(4x)/(x+1)$, předpoklad (P),
- třetí limitu standardně.

Díky spojitosti exponenciály se pak původní limita rovná $e^{8/3}$.

Příklad 3 (j)

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+}\exp\left(\frac{1}{x}\log\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)\right)$$

Opět stačí spočítat

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} \log\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right) &= \lim_{x\to 0+} \frac{\log\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)}{\frac{4^x+5^x+6^x}{3}-1} \left(\frac{4^x-1}{3}+\frac{5^x-1}{3}+\frac{6^x-1}{3}\right)\frac{1}{x} \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{\log\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)}{\frac{4^x+5^x+6^x}{3}-1} \left(\frac{e^{x\log 4}-1}{x\log 4}\frac{x\log 4}{3}+\frac{e^{x\log 5}-1}{x\log 4}\frac{x\log 5}{3}+\frac{e^{x\log 6}-1}{x\log 6}\frac{x\log 6}{3}\right)\frac{1}{x} \\
&\overset{\text{AL}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\log\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)}{\frac{4^x+5^x+6^x}{3}-1} \cdot \frac{1}{3}\Bigg(\log 4\left(\lim_{x\to 0+}\frac{e^{x\log 4}-1}{x\log 4}\right)+\log 5\left(\lim_{x\to 0+}\frac{e^{x\log 5}-1}{x\log 5}\right)+ \\
&\quad +\log 6\left(\lim_{x\to 0+}\frac{e^{x\log 6}-1}{x\log 6}\right)\Bigg)1\cdot\frac{1}{3}\left(\log 4+\log 5+\log 6\right) = \frac{1}{3}\log 120 = \frac{1}{3}\log(8\cdot 15) = \log(2\sqrt[3]{15}).
\end{aligned}
$$

Díky spojitosti exponenciály se pak původní limita rovná $2\sqrt[3]{15}$.