

1. cvičení - teorie

6. 10. 2022

Číselné obory

$\mathbb{R}$ - reálná čísla

$\mathbb{N}$ - přirozená čísla

$\mathbb{Z}$ - celá čísla

$\mathbb{Q}$ - racionální čísla

Vzorce

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \dots + a_n$$

Kvadratická funkce

Obecný předpis: $y = ax^2 + bx + c$

- Řešení kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$

diskriminant: $D = b^2 - 4ac$

Je-li diskriminant nezáporný, pak $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Je-li $D < 0$, pak rovnice nemá řešení v $\mathbb{R}$.

- Grafem je parabola. Je-li $a > 0$, pak má orientaci $\cup$. Je-li $a < 0$, pak $\cap$.

Je-li $D < 0$, pak je parabolá celá nad nebo celá pod osou x .

Logaritmické a exponenciální funkce

Přirozený logaritmus značíme jako $\ln x$, případně jako $\log x$.

$$\forall a, x \in \mathbb{R}, a > 0: a^x > 0$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$\log x$ je definován pouze pro kladná čísla

$$\log_a(r \cdot s) = \log_a r + \log_a s$$

$$\log_a\left(\frac{r}{s}\right) = \log_a r - \log_a s$$

$$\log_a(r^s) = s \cdot \log_a r$$

Goniometrické funkce

Převádění mezi kvadranty: Necht' goniometrická funkce ($\sin, \cos, \tan, \cot$) nabývá v prvním kvadrantu v bodě x_1 nějaké hodnoty $a \in [0, 1]$. Pak platí, že v absolutní hodnotě nabývá hodnoty a i ve zbývajících třech kvadrantech, a to v bodech $x_2 = \pi - x_1$, $x_3 = \pi + x_1$ a $x_4 = 2\pi - x_1$.

$$1 = \sin^2(x) + \cos^2(x)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\tan(-x) = -\tan(x)$$

$$\cot(-x) = -\cot(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y) \qquad \cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

$$\sin(x - y) = \sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y) \qquad \cos(x - y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y)$$

Substituce

Užitečná např. při řešení jistých rovnic a nerovnic.

Spočívá v označení jistého výrazu písmenem. Pak celou rovnici vyjádříme tak, aby se tam vyskytovalo pouze naše nové písmeno. Získáme novou rovnici, kterou vyřešíme. Pak musíme ještě provést desubstituci, jak je vidno na příkladu uvedeném níže.

Řešme rovnici $(x + 1)^2 + 2x - 1 = 0$.

Provedme substituci $y = x + 1$. Pak $x = y - 1$.

Pomocí substituce, nahraďme v rovnici všechny výrazy s x za výrazy s y .

Dostaneme: $y^2 + 2(y - 1) - 1 = 0$.

Řešme rovnici: $y^2 + 2y - 3 = 0$.

Výsledek: $y = 1$ a $y = -3$.

U každého výsledku provedeme desubstituci (tj. za y napíšeme substituovaný výraz).

$y = 1 \Rightarrow x + 1 = 1$, tedy $x = 0$

$y = -3 \Rightarrow x + 1 = -3$, tedy $x = -4$.

Výsledek: $x \in \{-4, 0\}$.

Matematická indukce

Slouží k dokázání tvrzení, která mají platit pro všechna přirozená (popřípadě celá či racionální) čísla. Sestává ze dvou částí.

1. ověřit začátek - ověříme, že tvrzení platí pro $n = 1$, případně $n = 0$, nebo jiné, podle toho, od kterého čísla má tvrzení platit

2. n -tý krok - ověřit, že když výrok platí pro n , pak z toho plyne, že platí i pro $n + 1$. Využijeme zde takzvaný *indukční předpoklad*, tedy budeme předpokládat, že tvrzení již platí pro n kroků, a z toho chceme odvodit, že bude platit i pro $n + 1$ krok.

Vizte vzorové řešení příkladu 6.